

数理科学特論 A ~ 画像数学 ~ 第 1 回

イントロダクション - 画像科学と数学

画像科学とは

画像処理は、視覚で得られる情報である画像を操作する方法です。一般的には、画像とは数値の集まりで表されるデジタル画像をさし、画像の操作とはコンピュータによる数値の計算によって行うデジタル画像処理をさします。画像処理が行える高性能のパソコンが家庭にまで普及したこと、またインターネットの普及によりデジタル画像の通信がごく当たり前になったことにより、画像処理は数年前には考えられなかったほど身近なものになっています。

一方、この講義で扱う画像科学というのは、この画像と画像処理の方法を研究する学問です。画像処理という「技術」と「学問」との違いは、雑多な技術を体系づける理論の存在にあります。この講義では、画像処理を科学にするこのような理論を、それを理解するのに必要な数学とともに説明します。

画像のサンプリングとデジタル処理 - フーリエ変換, サンプリング定理

画像は本来輝度が連続的に分布したのですが、コンピュータで取り扱うためには、これを離散的な画素の集まりに直す必要があります。この作業がサンプリングですが、サンプリングするときの画素の間隔が粗いと、画像のもつ細かい情報が失われます。ところで、「細かい」とはどういうことでしょうか？「細かさ」は、画像科学では「空間周波数」という概念で表されます。このトピックでは、空間周波数の定義とフーリエ変換、および、必要なサンプリングの細かさを定めるサンプリング定理、デジタル画像でフーリエ変換を行うための離散フーリエ変換について説明します。

直交変換による画像圧縮 - 主成分分析と K L 変換, コサイン変換

デジタル画像は、各画素がもつ輝度を表す数値（画素値）の集まりとして表されています。これは、画像を各画素を要素とするベクトルとして表したことになります。しかし、基底をこのように選ぶ必要は必ずしもなく、直交変換を使えば別の基底に変換することができます。このとき、うまく基底を選ぶと、特定のいくつかの基底に対応するベクトルの要素が大きな値をとり、他の要素がほぼ 0 になるようにできます。そうすると、常にほぼ 0 であるような要素を省略することで画像のデータ量を圧縮することができます。講義では、このような基底を選ぶ方法の基礎である主成分分析と K L (Karhunen-Loève) 変換、および、現在広く用いられている JPEG 方式のデータ圧縮に使われているコサイン変換について説明します。

モルフォロジー (mathematical morphology)

ここまでは画素における輝度に注目して画像の取り扱いを考えてきましたが、ここでは画像中の物体の「形」に注目します。画像中の物体が「どんな」形をしているか、「どのくらいの」大きさなのか、そういうことを定量的に取り扱うにはどうしたらよいでしょうか？ Mathematical morphology は、この問題に対する一つのアプローチです。講義では、Mathematical morphology とその基礎になる Minkowski 集合演算、およびサイズ分布などの各種の発展について説明します。

ニューラルネットワークと最適化問題

画像科学におけるニューラルネットワークの研究は、網膜で得られた画像情報が脳に伝わる過程が、層状のニューラルネットワークモデルで表現できることから発展してきました。講義では、ニューラルネットワークの考え方、最急降下法を基本とした層状ネットワークの学習理論について説明します。さらに、一般的に最適化問題を解く方法としての遺伝的アルゴリズムやシミュレー

ティッドアニメーリングについても説明します。

CTスキャナ：投影からの像復元 - Radon 変換と逆変換

CTスキャナは、人間の胴体の内部を輪切りにして撮影できる装置として知られています。この「輪切り像」は、体の周りのたくさんの方向からX線を照射して撮影した投影像を撮影し、それらをもとに計算によって求められた「想像図」です。各投影像は、体の内部の各部のX線吸収率を照射方向に積分したものになっています。したがって「輪切り像」を求めることは、吸収率分布の各方向の積分から吸収率を復元する計算になります。講義では、この計算の基礎になる Radon 変換から始めて、像復元の方法を説明します。

初回講義のおまけ

次の記事について、統計学におかしな点があれば述べてください。

「サメ肌水着」五輪で圧勝 競泳金メダルの6割獲得

ミズノと東レ、英スポーツ用品メーカーのスピード社が開発し、「サメ肌水着」として注目された「スピード ファーストスキン」の着用者が、シドニー五輪の競泳競技で、金メダル総数の6割にあたる31個を獲得した。メーカー各社の激しい開発競争を制したミズノの上治丈太郎取締役（現地責任者）は、「技術力の高さが証明でき 満足している」と話し、早くも4年後のアテネ五輪へ向けた開発に意欲をみせている。

ファーストスキンの着用者は、出場選手1677人の6割にあたる1006人（138カ国）に上った。メダルは、151個のうちの100個（66%）を獲得。「金」は、男子が1500メートル自由形のグラン・ハケット（オーストラリア）ら26個中の14個（54%）、女子が50メートル、100メートル自由形のインヘ・デブルーイン（オランダ）ら25個中の17個（68%）を占めた。世界記録は、着用者が2、3人いたリレーも含め、12種目で樹立に貢献したという。

日本代表選手では、男子9人全員、女子12人のうち5人が、ファーストスキンを着用した。メダルは、「銅」を獲得した女子の400メートルメドレーリレーに出場した源純夏、大西順子の2選手にとどまった。（朝日新聞 asahi.com 2000年9月25日）

おまけの解答

「『サメ肌水着』を出場選手の6割が着用した」ということは、「出場選手の6割を無作為に抽出し、『サメ肌水着』を着用させた」ということではありません。最新型の「サメ肌水着」を着用できた選手はおそらく有力選手で、彼らは「サメ肌水着」を着なくてもメダルをとる可能性が高い人たちです。「サメ肌水着」を着用した選手が有力選手を中心に6割もいたのに、この人たちがとった金メダルが全体の60%しかないというのは、むしろ少ないといってもいいでしょう。

本当に「サメ肌水着」の効果を調べるには、同じ選手が「サメ肌水着」を着たときと着なかったときとで、どのくらい記録が異なるかを知る必要があります。もしそのような調査ができないのなら、選手を無作為抽出して「サメ肌水着」を着せ、着た選手と着なかった選手とで結果を比較する、という方法をとることが少なくとも必要です。この方法を無作為割り付けといい、薬品の動物実験等で用いられています。