

数理学特論 A ~ 画像数学 ~ 第 14 回

シリーズ 5 : CT スキャナ - 投影からの像復元

(2) 投影からの画像の再構成

前回の講義では、画像の再構成の手がかりとなる「投影定理」を説明しました。今回は、この手がかりをもとに、投影から画像を再構成するいろいろな方法を見てゆきます。

フーリエ変換法による再構成

前回説明した投影定理は、物体（の透過率分布） $f(x, y)$ を、 x 軸となす角度が θ であるような s 軸に投影して Radon 変換 $g(s, \theta)$ を得たとき、

Radon 変換 $g(s, \theta)$ の s についての 1 次元フーリエ変換 $G_\theta(\xi)$ と

物体 $f(x, y)$ の 2 次元フーリエ変換 $F(f_x, f_y)$ の、原点を通り f_y 面に垂直で f_x 軸に対して角度 θ をなす平面による断面 $F(\xi \cos \theta, \xi \sin \theta)$ は等しい、

というものです。この定理によれば、ひとつの角度 θ における投影を得ると、物体のフーリエ変換のひとつの断面がわかることとなります。したがって、すべての θ についての投影を求めれば物体のフーリエ変換 $F(f_x, f_y)$ の形はすべて求まります。こうやって得られた $F(f_x, f_y)$ を逆フーリエ変換すれば、もとの物体 $f(x, y)$ が再構成されます。このような再構成法を、フーリエ変換法(Fourier transform method)による再構成といいます。

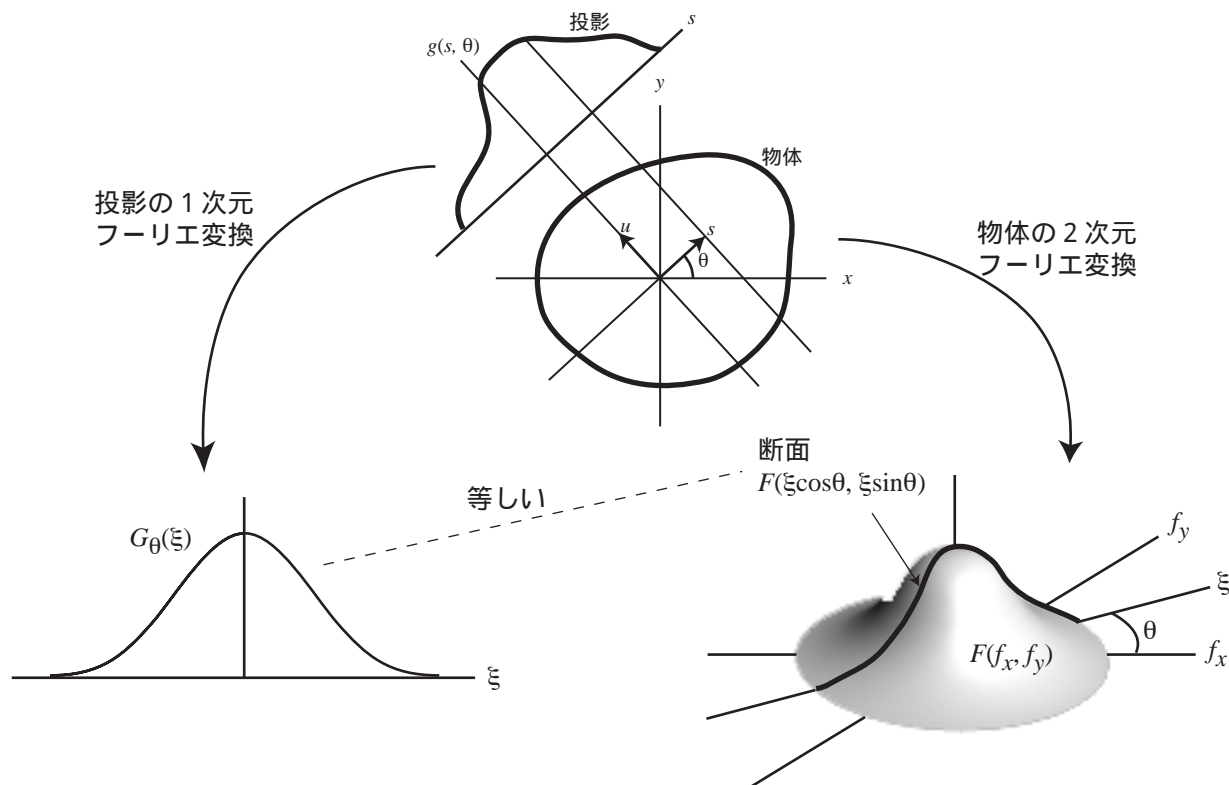


図 1 . 投影定理

この方法は理論的にもっともすっきりしていますが、実際にはあまり用いられていません。それは、次の理由によります。

実際に透視像を撮影する場合、「すべての θ 」についての投影を求めることはできず、 θ についてある程度の間隔をおいて撮影することになります。また、計算機で $g(s, \theta)$ をフーリエ変換を計算するときには、 s についてサンプリングを行って離散フーリエ変換を行うことになります。したがって、実際の撮影では $F(f_x, f_y)$ は f_x, f_y 平面で放射状に並んだ離散的な点についてしか求められません。一方、 $F(f_x, f_y)$ を離散逆フーリエ変換するには、 f_x, f_y 平面で正方格子状にならんだ格子点について $F(f_x, f_y)$ を知る必要があります。これらの点は異なった点ですから、放射状の点での値から格子点での値を、何らかの補間等を用いて推定しなければなりません。このような周波数空間での補間による誤差は、実空間では画面全体にわたるアーティファクト（artifact, 本来存在しないのに処理のために生じる雑音）を生じます。画像診断では、正常ならばないはずのもの、例えば腫瘍などを画像から発見することで診断を行いますから、アーティファクトは大きな障害になるのです。

逆投影法とフィルタ補正逆投影法

もうすこし素朴な再構成の方法を考えてみましょう。物体のある点 (x, y) での値 $f(x, y)$ を求めるのに、 (x, y) を通して写された投影をすべての θ について足しあわせることを考えます。こうすると、これらの投影はすべて $f(x, y)$ を含んでいますから、 $f(x, y)$ が一番強調され、投影に含まれている他の値によるぼけは生じるものの、一応 $f(x, y)$ が復元されるように思えます。この方法を逆投影法といいます。本当に復元ができるかどうか、計算してみましょう。

角度 θ の軸に投影された Radon 変換 $g(s, \theta)$ のうち (x, y) を通ってきた部分は、前回の(8)式で説明した s と x, y の関係式

$$s = x \cos \theta + y \sin \theta \quad (1)$$

によって $g(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta)$ となります。これをすべての θ について足しあわせるわけですから、逆投影法による再構成像 $b(x, y)$ は

$$b(x, y) = \int_0^\pi g(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) d\theta \quad (2)$$

と表されます。Radon 変換の式（前回の(6)式）、すなわち

$$g(s, \theta) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - s) dx dy \quad (3)$$

と(1)式を(2)式に代入すると

$$\begin{aligned} b(x, y) &= \int_0^\pi \iint_{-\infty}^{\infty} f(x', y') \delta(x' \cos \theta + y' \sin \theta - (x \cos \theta + y \sin \theta)) dx' dy' d\theta \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} f(x', y') \left[\int_0^\pi \delta((x' - x) \cos \theta + (y' - y) \sin \theta) d\theta \right] dx' dy' \end{aligned} \quad (4)$$

となります。ここで、関数 $h(\theta)$ が有限個の $\theta = \theta_k$ についてしか 0 にならないとき

$$\delta[h(\theta)] = \sum_k \frac{1}{|h'(\theta_k)|} \delta[\theta - \theta_k] \quad (5)$$

がなりたつことを用います（証明は略）。(4)式のデルタ関数の引数について

$$\begin{aligned} (x' - x) \cos \theta + (y' - y) \sin \theta &= \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2} \sin(\theta + \alpha), \\ \alpha &= \cos^{-1} \frac{y' - y}{\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}} = \sin^{-1} \frac{x' - x}{\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}} \end{aligned} \quad (6)$$

で， $0 \leq \theta < \pi$ でこの値が 0 になるのは $\theta = \pi - \alpha$ のときだけです．したがって (4)式のデルタ関数は

$$\delta((x' - x) \cos \theta + (y' - y) \sin \theta) = \frac{1}{\left| \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2} \cos(\pi) \right|} \delta(\theta - (\pi - \alpha)) \quad (7)$$

となり (4)式は

$$\begin{aligned} b(x, y) &= \iint_{-\infty}^{\infty} f(x', y') \left[\frac{1}{\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}} \right] dx' dy' \\ &= f(x, y) * \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right] \end{aligned} \quad (8)$$

となります．*はコンヴォリューションの記号です．したがって，逆投影法による再構成像 $b(x, y)$ は，もとの物体 $f(x, y)$ の各点に関数 $1 / \sqrt{x^2 + y^2}$ を重畳してぼかした像になります．

このままでは，再構成像が得られたとはいえません．しかし (8)式の両辺をフーリエ変換すると，「コンヴォリューションのフーリエ変換 = フーリエ変換のかけ算」の関係があるので

$$\begin{aligned} \text{FT}[b(x, y)] &= \text{FT}[f(x, y)] \times \text{FT} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right] \\ \therefore \text{FT}[f(x, y)] &= \text{FT}[b(x, y)] / \text{FT} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right] \end{aligned} \quad (9)$$

となります．

$$\text{FT} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right] = \frac{1}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2}} \quad (10)$$

であることを用いると（計算は略）(9)式は

$$\text{FT}[f(x, y)] = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} \times \text{FT}[b(x, y)] \quad (11)$$

となり (11)式でもとの物体 $f(x, y)$ のフーリエ変換を復元できます．この方法を逆フィルタリング (inverse filtering) といい，このような方法でコンヴォリューションの逆演算を行うことをデコンヴォリューション (deconvolution) といいます．

この方法には，2つ問題点があります．そのひとつは，逆投影 $b(x, y)$ は物体 $f(x, y)$ がぼけて広がった形になっているため， $\text{FT}[b(x, y)]$ を物体 $f(x, y)$ の存在する範囲よりもずっと大きくとって計算しなけ

ればならないことです。もうひとつは、 $f(x, y)$ は吸収率の分布ですから正の値であるにもかかわらず、(11)式から $f_x = f_y = 0$ のとき $FT[f(x, y)] = 0$ となります。つまり周波数 0 すなわち直流成分が 0 ということで、 $f(x, y)$ がすべて正の値というのはありえなくなります。これは、 $f_x = f_y = 0$ のとき $FT[b(x, y)]$ は発散してしまっていて、そもそも情報が得られていないことに原因があります。

フィルタ補正逆投影法

前節のように逆投影法は実はずまくいきませんが、投影定理を用いると、逆投影法とよく似ていてしかも実用的な再構成法を導くことができます。

$FT[f(x, y)]$ を前回にならって $F(f_x, f_y)$ と書くことにしましょう。 $F(f_x, f_y)$ を逆フーリエ変換したものが $f(x, y)$ ですから、

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(f_x, f_y) \exp(i2\pi(f_x x + f_y y)) df_x df_y \quad (12)$$

と表されます。これを、図 1 の右下のように $f_x = \xi \cos \theta, f_y = \xi \sin \theta$ として極座標 (ξ, θ) に変換すると

$$f(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} F(\xi \cos \theta, \xi \sin \theta) \exp(i2\pi\xi(x \cos \theta + y \sin \theta)) \xi d\xi d\theta \quad (13)$$

となります。投影定理により、Radon 変換 $g(s, \theta)$ の s についての 1 次元フーリエ変換 $G_\theta(\xi)$ とは

$$G_\theta(\xi) = F(\xi \cos \theta, \xi \sin \theta) \quad (14)$$

という関係がありますから（前回の(14)式）、

$$f(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} G_\theta(\xi) \exp(i2\pi\xi(x \cos \theta + y \sin \theta)) \xi d\xi d\theta \quad (15)$$

が得られます。ここで、 ξ の積分区間を $-\infty$ から ∞ とし、そのかわりに θ の積分区間を 0 から π としても、積分する範囲は同じですから

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_\theta(\xi) \exp(i2\pi\xi(x \cos \theta + y \sin \theta)) |\xi| d\xi d\theta \quad (16)$$

となり、 s と x, y の関係式 (1) 式) を使うと

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |G_\theta(\xi) \exp(i2\pi s \xi)| d\xi \right\} d\theta \quad (17)$$

となります。この式の $\{ \}$ 内は、関数 $|G_\theta(\xi) \exp(i2\pi s \xi)|$ の逆フーリエ変換になっています。そこで、

$$\hat{g}(s, \theta) = \hat{g}(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} |G_\theta(\xi) \exp(i2\pi s \xi)| d\xi \quad (18)$$

とあくと (17)式は

$$f(x, y) = \int_0^\pi \hat{g}(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) d\theta \quad (19)$$

となります。これは (2)式の逆投影と同じ形です。つまり(19)式は、「各 θ について、投影を周波数空間において $|\xi|$ 倍するフィルタを適用しておいてから、逆投影」すれば物体 $f(x, y)$ が得られることを表しています。この方法をフィルタ補正逆投影法(filter back projection method)といいます。前節の「デコンヴォリューションをともなう逆投影法」では逆投影をしてから補正をしていますが、この方法では補正をしてから逆投影しています。

この方法では、投影に関してのみフーリエ変換を扱えばよいので、デコンヴォリューションをともなう逆投影法のようにぼけによって広がった物体像の逆フーリエ変換を扱う必要はありません。また、フーリエ変換法と同様に極座標上の点から直交座標上の格子点への補間の操作が必要ですが、フーリエ変換法と違って実空間で補間を行うので、実空間で画面全体にわたるアーティファクトを生じることはありません。また、フィルタによる補正は各 θ で独立に行えるので、ある θ での補正を他の θ での投影の撮影を待たずに行えます。

ところで (18)式の計算は Radon 変換 $g(s, \theta)$ のフーリエ変換 $G_\theta(\xi)$ にフィルタ関数 $|\xi|$ をかけて逆フーリエ変換しているだけですから、フィルタ関数を実空間で表した $FT^{-1}[|\xi|]$ を用いると

$$\hat{g}(s, \theta) = g(s, \theta) * FT^{-1}[|\xi|] \quad (19)$$

とコンヴォリューションで表され、フーリエ変換を行う必要はなくなります。この方法はコンヴォリューション逆投影法 (convolution back projection method) とよばれています。

実際には、フィルタ関数 $|\xi|$ は無限の周波数帯域をもつため、このままでは用いることができません。今回は、そのあたりを含め現実の再構成の計算について説明します。