2005 年度後期　情報統計学　第２回

確率

第 1 回講義で，「くじびきが当たる確率 50%」などと，はじめから簡単に「確率」という言葉を使いました．ここで，「確率」の意味をもう一度よく考えてみましょう．

「可能性」の集合

いま，くじをひくと，当たりが出たとします．現実世界では，くじは確かに当たったのであって，それ以外の結果は現れていません．

しかし，われわれは，くじびきとはいつも当たるものではなく，いま現れている「当たり」は偶然による結果だということを知っています．「偶然による」というのは，他の可能性もあった，つまり偶然によって他の結果になるかもしれなかった，ということを意味しています．この例の場合ならば，「はずれ」が出るという可能性もあった，ということになります．このような「結果が偶然によって決まる現象」をランダム現象といいます．

統計学の世界では，つねに，この「可能性の集合」を念頭において，考えを進めます．この例の場合ならば，「今は『当たり』という結果が現れたが，『はずれ』が現れる可能性もあった」と考えている，ということです．

そして，さらに「どの結果が，どのくらい現れやすいか」を考えます．これを数字で表したのが確率です．「現れやすさ」などというものを，どのように数字で表せばよいのでしょうか．ひとつの考え方は，下のようなものです．

> ある結果が現れる確率とは，
> これからその結果が現れる可能性のある 十分多くの回数の 機会があるとき，
> そのうち本当にその結果が現れる回数の割合である．
>
> 次にその結果が現れる確率とは，
> 遠い将来までの十分多くの回数の機会を考えて初めて言える「結果の回数の割合」を，
> 次の１回 の機会にあてはめて述べたものにすぎない．

例えば，くじ引きを十分多くの回数行なうとき，10 回に 3 回の割合で当たりが出るとすれば，「あたりが出る確率」は 1/3 であると考えます．

ただし，次にくじを 1 回ひくとき，当たりが出るかどうかは何とも言えません．ただ，「これからもくじをひきつづけると，長い目で見れば 10 回に 3 回の割合で当たりが出るだろう」という数値で，次の 1 回の機会での当たりくじの「出やすさ」を表現しようというのが，確率の考え方です．

ギャンブルの例で言えば，プロのギャンブラーは日常的に多くの賭けをし，長い目で見た利益を考えていますから，常に確率が大きい方に賭けるほうが有利です．しかし，1 回しか賭けをしない人にとっては，「確率が大きい」ことと「次の賭けで勝てる」こととは直接は結びつかないことになります．

ここでいう「あたりが出る」などの「結果」を，確率論の言葉では事象といいます．また，事象が起きる機会，この例ならば「くじを引くこと」を試行といいます．また，このような確率の考え方を，頻度による確率の定義（統計的確率）といいます．つまり，確率とは「特定の結果がおきる回数の割合」ですから，その値は 0 から 1（0%～ 100%）の範囲になります．

さいころの各目が出る確率はどれも 1/6 か？

高校までの教科書で確率を学ぶ時には，「さいころの各目が出る確率は，いずれも 1/6 である」ということを前提にしていたと思います．

しかし，頻度による確率の定義から考えれば，次にさいころをふったときにある目が出る確率は，十分に多くの回数さいころを振ってみなければわからないことになります．しかも，「十分に多くの回数」振らなければなりませんが，何回なら十分なのでしょうか？ 実は，数学でいう「十分に多く」というのは，「誰も文句を言わないぐらい多く」という意味であって，何回振っても十分ではないのです．

また，さいころを 1 万回ふって，そのうち 1 の目が 1/6 の割合で出たとしても，それはあくまで「過去の実績」であって，その次に 1 万回さいころをふっても，1 の目は 1 回も出ないかもしれません．つまり，頻度による定義では，現実には確率を定めることはできないことになります．

では，なぜ「さいころの各目が出る確率は，いずれも 1/6 である」と言われているのでしょうか？ それは，

1. 各目が同じ確率で出る
2. 各目が出る確率は，いつさいころを振っても同じである

ということを皆が認めているからです．そこで「さいころには全部で 6 種類の目があって，いずれの目も常に同じ確率で出るから，各目が出る確率は 1/6」ということになります．

高校までに習った確率の問題は，このような仮定を認めたうえで，確率すなわち「特定の結果が現れる回数の割合」の問題を，「（さいころの目の種類などの）可能性のある結果の種類の割合」の問題に置き換えたものです．このような確率の考え方をラプラスの定義（数学的確率）といいます．

しかし，このラプラスの定義も，よく考えるとおかしなところがあります．上で「このような仮定を認めれば」と書きましたが，これが認められるかどうかは，さいころを十分な回数振ってみないとわかりません．これでは堂々めぐりです．

つまり，確率の定義にはどのように考えてもあやしいところがあります．確率は，遠い将来までを長い目で見てはじめて言える「特定の結果が現れる回数の割合」を，次の 1 回の機会にあてはめて述べたものにすぎません．また，確率の定義には「十分多くの回数さいころを投げる」という現実には実行不可能な操作や，「各目が同じ確率で出る」という真偽を確かめられない仮定が含まれています．ですから，確率は測定するものではなく，何らかの仮定をおいて「定義する」ものなのです．この講義で扱う統計学では，概ね常識的に確率を理解しておけば十分ですが，ここまでに述べた確率の「あやしさ」は承知しておいてもらいたいと思います[1]．

条件付き確率と「独立」

統計学では，「独立」という言葉がよく出てきます．これは，簡単にいえば，2 つのランダム現象があるとき，一方の結果がもう一方の結果に影響しない，という意味です．例えば，2 つのくじ引きがあるとき，一方に当たるともう一方にも当たりやすくなる，というときは，2 つのくじ引きは独立ではありません．

[1]現代の数学では，確率は現実の問題から離れて，集合を測る尺度（測度）のひとつとしてとらえられています．

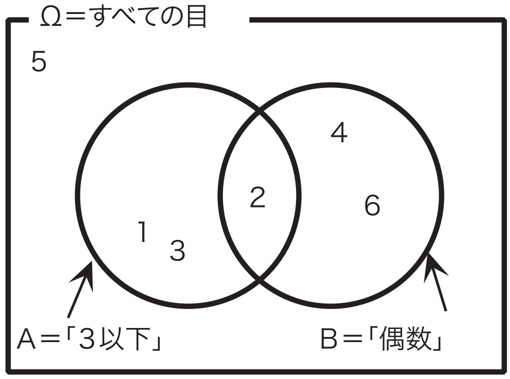

図 1: ２つの事象とベン図

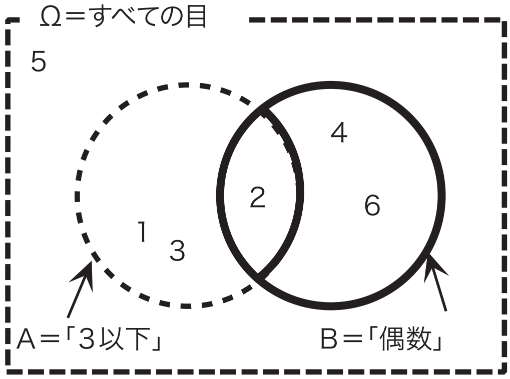

図 2: 条件付き確率

独立の概念は，正確には条件付き確率を使って定義されます．単に「明日雨がふる確率」よりも，「明日雨が降るという予報が出たときに，本当に雨がふる確率」のほうが大きい，というのは，日常感じることです．後者のような確率が条件付き確率とよばれるものです．以下では，その意味を，さいころの各目が出る確率を例にとって説明します．

さいころで，「３以下の目が出る確率」を図に表すことを考えます．さいころで，「可能なすべての目」は 1, 2, 3, 4, 5, 6 の６通りで，これを集合 Ω で表します．一方，「３以下の目」は 1, 2, 3 の３通りで，これを Ω の内部にある集合 A で表します．

このとき，「３以下の目が出る確率」は，集合 A の要素がおきる確率なので，「事象 A がおきる確率」で，$P(A)$ で表します．$P(A)$ は，「集合 A の要素の数」を $|A|$ で表すと，

$$P(A) = |A|/|\Omega| = 3/6 = 1/2 \tag{1}$$

となります．

さらにもうひとつ，「偶数の目が出る確率」を考えます．同様にして，「偶数の目」は 2, 4, 6 の３通りで，これを集合 B で表すと，「偶数の目が出る確率」$P(B)$ は

$$P(B) = |B|/|\Omega| = 3/6 = 1/2 \tag{2}$$

となります．これらを目に見えるように表したのが「ベン図」で，図 1 となります．

では，「３以下かつ偶数の目が出る」確率を考えましょう．この事象は集合 $A \cap B$ で表されますから，その確率 $P(A \cap B)$ は

$$P(B) = |A \cap B|/|\Omega| = 1/6 \tag{3}$$

となります．

ここで，$|A \cap B|/|B|$ という確率を考えてみましょう．図 2 の太線の部分です．分母が $|\Omega|$ から $|B|$ に変わっていますから，ここでは，「偶数の目」が，ここでの「可能なすべての目」になっています．一方，$A \cap B$ は「３以下かつ偶数の目が出る」という事象ですが，今は「偶数の目が出る」という事象の中でしか考えていませんから，この事象は単に「３以下の目が出る」という事象ということができます．したがって，

> $|A \cap B|/|B|$ ＝偶数の目が出るとわかっている時（偶数の目が出るのが確実な時），それが３以下である確率

になります．

これを，「B を条件とする A の条件付き確率」といい，$P(A|B)$ で表します．$P(A|B) = |A \cap B|/|B| = 1/3$ ですから,「偶数の目が出た」という情報が得られている時は，そうでないときよりも「３以下の目が出る」確率は小さくなることがわかります．

ところで,

$$P(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{|A \cap B|/|\Omega|}{|B|/|\Omega|} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{4}$$

と表され，これを条件付き確率の定義としている本もあります．ただし，この場合，分母分子それぞれの確率は，いずれも同じ $|\Omega|$ を分母とする確率でなければならないことに，注意する必要があります．また，(4) 式から

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) \tag{5}$$

となります．(5) 式は，簡単に言えば

「A と B の両方が起きる確率」＝「B が起きたとしたときに A が起きる確率」
×「本当に B が起きる確率」

ということです．$P(A|B)$ と $P(A \cap B)$ の違いも，これでわかると思います．

では，上の例の事象 A が,「３以下の目」ではなく「２以下の目」だったらどうでしょう．このときは,「２以下の目が出る確率」$P(A) = 1/3$ です．一方，$P(A \cap B) = 1/6$ や $P(B) = 1/2$ は変わりませんから，$P(A|B) = |A \cap B|/|B| = 1/3$ もかわりません．

したがって，このときは $P(A|B) = P(A)$ となります．このときは,「事象 A が起きる確率」と「事象 B が起きるとわかっているときに，事象 A が起きる確率」が同じですから，事象 B が起きるかどうかには関係がないことを意味しています．このとき，事象 A と事象 B は独立であるといいます．

事象 A と事象 B が独立のとき，(4) 式から

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \tag{6}$$

となります．事象 A と事象 B が独立のときこうなるのであって，いつもこうなるのではないことに注意してください．

確率のパラドックス

次の問題を考えてみましょう．

> 囚人が 3 人いて,「A, B, C の 3 人のうち，2 人は明日処刑される．あとのひとりは釈放される．誰が処刑されるかは明日朝発表される」と言い渡されています．以下は，処刑前夜の囚人 A と看守の会話です．
>
> > 囚人 A「看守さんは，明日誰が処刑されるかを知っているそうですね．私が明日処刑されるかどうかを，教えてくれとは言いません．ただ，私以外の B, C のうち，どちらが処刑されるかを教えてもらえませんか？」

看守「本当は言ってはいけないのだが... 実は，C は処刑されるのだ.」
囚人 A「よく教えてくださいました. これで少し安心しました.」
看守「なぜだ？」
囚人 A「看守さんの話を聞く前は，私が処刑される確率は 2/3 でした. ところが，看守さんに C が処刑されると教えていただきました. ということは，あとは私と B の２人にひとりが処刑されるので，私が処刑される確率は 1/2 に減りました.

さて，なにかおかしいと思いませんか？

∧∧
≡・・≡
(　)〜

A, C が処刑される確率をそれぞれ $P(A), P(C)$ とすると，求める確率は $P(A|C)$ で，$P(C) = 2/3$ で $P(A \cap C) = 1/3$ だから，$P(A|C) = P(A \cap C)/P(C) = 1/2$ でいいんじゃないですか？

看守の話を聞いて「A が処刑される確率」が変わるんやろうか？条件付き確率というのは，条件の事象が起きることが，もとの事象が起きるかどうかに影響しているときに意味があるわけやな. 看守の話は，A が処刑されるかどうかについては，何の手がかりにもなってないんと違うか？

∧◆∧
≡ o- o ≡
(　　)〜

上のネコ博士が言っているように，この問題に答えるポイントは，**「『C が処刑される』という情報は，A が処刑されるかどうかについての手がかりになるか？」**ということです.

もしも看守が，囚人 A, B, C を平等にくじで選んで，そのうえで「偶然 C を選び，『C は処刑される』と答えた」というのなら，A も B も平等に，釈放される可能性が高まります. つまり，「C が処刑される」という情報は，A にも B にも平等に「釈放されるかどうか」の手がかりを与えています. 上のネコ君が言っている条件付き確率は，このような場合の確率を表しています.

しかし，看守は「A については，処刑されるかどうかを言わない」ことをはじめから明らかにしていますから，「C が処刑される」という情報は，上のように「A が釈放されるかどうか」の手がかりになるわけではありません.

この場合でも，もし仮に「看守には癖がある. 看守は，B が釈放されるときだけ『C が処刑される』と答える. A が釈放されるときには，C のことには触れず，必ず『B が処刑される』と答える.」という情報でもあるのなら，看守が「C が処刑される」と言ったことは，「B が釈放される」という確証になります.

しかし，今回の問題では，そういう情報は何もありません. つまり，「C が処刑される」という情報は，「A が釈放されるかどうか」については何の手がかりも与えていません. つまり，「C が処刑される」という事象と「A が釈放される」という事象は独立ですから，「A が処刑される確率」は依然 2/3 です

ところで，上で述べていることは，看守の「癖」や「心の中」を問題にしています. 上で述べたように，看守の「心の中」についての情報がわかれば，それに応じて結果は変わってきます. しかし，心の中を客観的に調べることは，通常はできません. 「確率は，測るものではなく，定義するもの」なのです.

上の「看守と囚人」の問題は，「モンティ・ホールのパラドックス (逆説)」として知られているのと同じものです. 講義のウェブサイトの「統計データ・ツールへのリンク」には，この問題をはじめ，ルーレットやさいころにおける確率の問題についての解説記事へのリンクを掲載しています.