2006 年度後期「情報統計学」（担当：浅野晃）試験問題 (2007．2．7)

- 次の３問すべてに解答せよ．
- 解答用紙の上の欄に科目名・教官名，下の欄に座席番号，学部学科，学生番号，氏名を記入すること．それ以外の欄には記入する必要はない．
- 解答用紙では，各問の解答の前に問題番号を明示せよ．問題番号の順に解答する必要はない．
- 解答用紙が足りない場合は，裏面を使用してもよい．裏面を使用するときは，表面の一番下に「裏面に続く」と明記せよ．
- トイレなどの理由で一時退出することはできない．退出の際は解答用紙を提出して退出せよ．
- この問題用紙は持ち帰ってよい．
- 自然対数の底 $e = 2.718$ とする．

［問題１］ （25 点）　さいころを 1 回投げたとき，ある 1 つの目が出る確率は 1/6 であるといわれている．では，未使用のさいころが 1 つあるとする．このさいころを 1 回投げたとき 1 の目が出る確率が，1/6 であることを証明できるか．できるならばそのやり方を記せ．できないならば，なぜできないのかを説明せよ．

［問題２］ （25 点）　物質 X で汚染されていることが疑われている土砂がある．そこで，この土砂を 1 グラム抽出してその中に含まれる物質 X の量を測定することを，9 回くりかえして行なった．物質 X の量の測定値の平均は 15(ミリグラム)，不偏分散は 0.15（(ミリグラム)^2）であった．

1. 講義で説明した知識を使って,「土砂 1 グラムあたりに含まれる物質 X の量」を区間推定したい．上記の測定は，この知識による区間推定に適しているか．適していない場合は，測定の方法について，追加すべき条件をあげよ．
2. 1. で追加すべき条件があったとしてもそれが満たされており，上記の測定がこの知識による区間推定に適しているとするとき，信頼係数 95% で 1. の区間推定を行なえ．

［問題３］ （25 点）　ある店には，１時間あたりにやってくる男性客の数の期待値は２人，女性客のそれは１人であるという．各々の客は独立に一定の確率で店を訪れているとするとき，１時間の間に男女を問わず客がちょうど２人やってくる確率を求めよ．

2005 年度後期「統計データ解析Ｂ」（担当：浅野晃）試験解答例 (2006．2．15)

［問題１］ 証明することはできない．
さいころを１回投げたとき，ある１つの目が出る確率が 1/6 であるといわれているのは，さいころのどの目も同じ確率で出る，と仮定できるときにいえることである．しかし，さいころのある目が出る確率とは，これから未来にわたって十分多くの回数さいころをふったときに，その目が出る回数の割合であるから，実験によって調べることはできない．したがって，上の仮定も実験によって確かめることはできない．

［問題２］

1. 適していない．追加する条件：１．ここでの測定は，無作為抽出になっていること．２．各測定での標本中に含まれる物質Ｘの量は正規分布にしたがっていること．

2. 土砂１グラムあたりに含まれる物質Ｘの量を μ，各測定での標本中の物質Ｘの量の平均を $\bar{X}$，不偏分散を s^2，標本サイズを n とする．このとき，上で付け加えた条件から，各測定での標本が含む物質Ｘの量は，平均 μ の正規分布にしたがうと考えられる．したがって，

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{s^2}{n}} \tag{1}$$

という値（t 統計量）は自由度 $n-1$ の t 分布 $t(n-1)$ にしたがうので，$t_{0.025}(n-1)$ を「t 統計量がその値以上になる確率が 0.025 であるような値」とし，$-t_{0.025}(n-1)$ を「t 統計量がその値以下になる確率が 0.025 であるような値」とすると

$$P\left(\bar{X} - t_{0.025}(n-1)\sqrt{\frac{s^2}{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{0.025}(n-1)\sqrt{\frac{s^2}{n}}\right) = 0.95 \tag{2}$$

となるので，μ の 95%信頼区間は (2) 式のかっこ内の範囲となる．

問題文より，$\bar{X} = 15$，$s^2 = 0.15$，$n = 9$，$t_{0.025}(9) = 2.262$ を (2) 式に代入すると，μ の 95%信頼区間は $[14.7, 15.3]$（ミリグラム）となる．

注： この問題の解答を，$P(14.7 \leq \mu \leq 15.3) = 0.95$ と書いてはいけません．この式では，確率を述べているのに，確率変数がどこにもありません（μ は確率変数ではない）．

［問題３］ 各々の客は独立に一定の確率で店を訪れるので，１時間あたりにやって来る客の数は男女それぞれポアソン分布にしたがうと考えられる．ポアソン分布にしたがう確率変数を X とすると，その確率分布は

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \tag{3}$$

と表され，このとき X の期待値は λ となる．よって，１時間あたりにやってくる男性客の数を M，女性客の数を F とすると，各々の期待値が 2 および 1 であるから，各々の確率分布は

$$P(M = m) = \frac{e^{-2}2^m}{m!}, P(F = f) = \frac{e^{-1}1^f}{f!}, \tag{4}$$

で表される．

さて，「男女を問わず客がちょうど２人やってくる」という事象は，「男性客が２人やって来て，かつ女性客が０人やってくる」「男性客が１人かつ女性客が１人」「男性客が０人かつ女性客が２人」のいずれかである．これらの事象は排反で，また男性客や女性客は独立にやって来るので，求める確率は

$$\begin{aligned}
&\text{「男２女０」} \quad \rightarrow \quad P(M=2) \times P(F=0) = \frac{e^{-2}2^2}{2!} \times \frac{e^{-1}1^0}{0!} = 0.0996 \\
&\text{「男１女１」} \quad \rightarrow \quad P(M=1) \times P(F=1) = \frac{e^{-2}2^1}{1!} \times \frac{e^{-1}1^1}{1!} = 0.0996 \\
&\text{「男０女２」} \quad \rightarrow \quad P(M=0) \times P(F=2) = \frac{e^{-2}2^0}{0!} \times \frac{e^{-1}1^2}{2!} = 0.0249
\end{aligned}$$

の和で，0.224 となる．

注：この問題では男女の客は独立に店にやって来ますから，男女を問わず 1 時間あたりにやって来る客の数もポアソン分布にしたがいます．また，２つの確率変数の和の期待値はそれぞれの期待値の和になりますから，その期待値は３人となります．これからただちに上と同じ解が得られます．このような解答も正解ですが,「男女の客が独立に店にやって来るから」という理由を示していない場合は減点しました．