２項分布，ポアソン分布，幾何分布

今日から３回の講義で，統計学でよく使われる確率分布モデルをいくつか説明します．今日は，ここまでの講義で例としてあげた「階級値」や「当たり本数」のように，確率変数の値がとびとびの値になる場合の確率分布モデル[1]をいくつか紹介します．本文中の式の導出は，後につけた付録を見てください．

ベルヌーイ試行と２項分布

> **問題１：**あるくじびきは，5%の確率で当たりが出るとします．このくじを 5 本ひいたとき，その中の 2 本以上が当たりである確率はいくらですか．

この問題のように，

- 「当たり・はずれ」,「成功・失敗」など，２種類の結果のどちらかが必ず起きるような実験（あるいは観測，検査）があり，
- この実験を何度も繰り返すとき，各実験での「成功」「失敗」それぞれの確率はつねに一定で，
- １つの実験の結果が他の実験に影響を及ぼさない（各実験が独立），

となります．このような仮定ができるような実験を**ベルヌーイ試行**といいます．ベルヌーイ試行で起こりうる２種類の結果を「成功」,「失敗」で表し，成功する確率が p，失敗する確率が $1-p$ とします．このとき，「n 回のベルヌーイ試行を行うとき，成功する回数」を X とします．

上のベルヌーイ試行について，X のしたがう確率分布を考えてみましょう．ここで，成功を○，失敗を●の記号で表すことにします．こうすると，「n 回の試行を行うとき，ちょうど x 回成功する」という状態は，「○が x 個，●が $n-x$ 個」からなる○●の列で表されます．成功する確率が p，失敗する確率が $1-p$ で，それぞれの試行が独立ですから，「○が x 個，●が $n-x$ 個」という列の 1 つが起きる確率は $p^x(1-p)^{n-x}$ です．そして，そのような列が何種類あるかは「n 個から x 個とる組み合わせの数」で表わされ，これは ${}_n\mathrm{C}_x$ という記号で表されます．

よって，「n 回の試行を行うとき，x 回成功する確率」$P(X=x)$ は，次のように表されます．

$$P(X=x) = {}_n\mathrm{C}_x p^x(1-p)^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}p^x(1-p)^{n-x} \tag{1}$$

この確率を，成功回数の例 x が最小の 0 回のときから最大の n 回のときまですべてについて求めると，成功回数を表す確率変数 X がしたがう確率分布が求められます．この確率分布は，「n 回の試行中 x 回成功する確率を，ベルヌーイ試行の仮定から求めたもの」ですから，確率分布モデルです．この確率分布モデルには**２項分布**という名前があり，$B(n,p)$ という記号で書くこともあります．ここで，n と p はパラメータです．つまり，「(n,p)」と書いてあるのは，試行回数 n と 1 回の試行での成功確率 p がわかれば，どの成功回数 x についても「x 回成功する確率」は計算できる，という意味です．

---

[1] 離散型確率分布モデルといいます．詳しくは，次回の講義で「連続型確率分布モデル」と一緒に説明します．

ある確率変数 X が２項分布 $B(n,p)$ にしたがうとき，その期待値 $E(X)$ と分散 $V(X)$ は次のように表されます．

$$E(X) = np,\ V(X) = np(1-p) \tag{2}$$

試行１回あたりの成功の確率が p で，それを n 回行うわけですから，「n 回試行したとき成功する回数の期待値」が np であることは，直感的にわかります．また，$p = 1/2$ の時分散が最大になることは，「成功する回数」の予測が，$p = 1/2$ のとき，一番しにくいことを示しています．

ポアソン分布とポアソン過程

> **問題２**：ある電話は，１分間の間にある着信の回数の期待値は３回であるという．この電話に１分間に５回以上の着信がある確率はいくらか．

この問題で，１分間を非常に細かく分けて，分割された各時間帯では「着信がないか，１回あるかどちらか」であるとしましょう．つまり，１つの時間帯に着信が２回あることはない，というくらい細かく分けるわけです．こうすると，各時間帯では「着信がある→成功，ない→失敗」というベルヌーイ試行が起こっていると考えられます．

ここで，１分間を非常に細かく分けたので，試行回数 n は $n \to \infty$ となります．しかし，１分間の着信の回数の期待値は３回で一定です．前節で説明した通り，「分割された各時間帯で着信がある」確率を p とすると，１分間の着信の回数の期待値は np で，$n \to \infty$ なのに np が一定なのですから，p が $p \to 0$ になっています．

このように，前節の２項分布において $n \to \infty$ とし，さらに期待値 $E(X) = np = \lambda$ で一定値であるとします．このような状況での２項分布の極限を**ポアソン分布**といい，定数 λ をパラメータとして $Po(\lambda)$ で表します．また，この問題のようにポアソン分布が適用できる実験を**ポアソン過程**といいます．ポアソン分布の確率分布は，次のように表されます．

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \tag{3}$$

また，期待値 $E(X)$ と分散 $V(X)$ は次のように表されます．

$$E(X) = \lambda,\ V(X) = \lambda \tag{4}$$

つまり，期待値も分散も同じになります．これは，２項分布の期待値と分散の式 (2) で，$np = \lambda, (1-p) \to 1$ の極限を考えれば理解できます．

幾何分布

> **問題３**：ある町では，１年の間に台風に襲われて被害が出る確率が 0.04 であるという．つぎにこの災害が起こるまでの年数の期待値はいくらか．また，その標準偏差はいくらか．さらに，この災害が 10 年以内に起こる確率はいくらか．

２項分布について学ぶついでに，２項分布と同じベルヌーイ試行について，別の値を確率変数とみた場合を考えてみましょう．上の問題で，ある年に台風が来るか来ないかというのはベルヌーイ試行になっています（この問題では，今年台風が来る確率は去年台風が来たかどうかには無関係であることに注意してください）．ここで，「何回も繰り返してベルヌーイ試行を行うとき，初めて成功するまでの回数」を確率変数 X とします．各試行の成功の確率が p であるとき，「最初の成功が起こるまで x 回かかる確率」$P(X=x)$ は，「$(x-1)$ 回失敗して，その後 1 回成功する確率」ですから

$$P(X=x)=p(1-p)^{x-1} \tag{5}$$

となります．(5) 式であらわされる確率分布を**幾何分布**といいます．幾何分布の期待値と分散は

$$E(X)=\frac{1}{p},\ V(X)=\frac{1-p}{p^2} \tag{6}$$

となります．例えば，1 回成功する確率が 1/5 なら，はじめて成功するまでに平均 5 回かかる，というわけです．幾何分布は，x を例えば 1 年，2 年，... のような「離散的な」時間としたとき，初めて成功するまでの待ち時間の確率分布ですから，**離散的待ち時間分布**とも呼ばれます[2]．

なお，幾何分布で「はじめて成功するまでの試行回数が x 回以内である確率」$P(X \le x)$ は

$$P(X \le x)=1-(1-p)^x \tag{7}$$

となります．これは，(5) 式が等比数列の形になっているため，等比数列の和の公式を使ってただちに求められます．

付録

２項分布の期待値と分散の導出

２項分布の頻度関数からモーメント母関数を求めると

$$\begin{aligned} M_X(t)=E(e^{tX}) &= \sum_{x=0}^{n} e^{tx}\frac{n!}{x!(n-x)!}p^x(1-p)^{n-x} \\ &= \sum_{x=0}^{n}\frac{n!}{x!(n-x)!}\left(pe^t\right)^x(1-p)^{n-x} \end{aligned} \tag{A1}$$

となります．(A1) 式の下の式は２項展開そのものですから，

$$M_X(t)=\left(pe^t+(1-p)\right)^n \tag{A2}$$

です．これを t で 1 回および２回微分すると

$$\begin{aligned} M'_X(t) &= npe^t\left(pe^t+(1-p)\right)^{n-1} \\ M''_X(t) &= np\left[e^t(n-1)\left(pe^t+(1-p)\right)^{n-2}pe^t+e^t\left(pe^t+(1-p)\right)^{n-1}\right] \\ &= npe^t\left[\left\{pe^t(n-1)+\left(pe^t+(1-p)\right)\right\}\left(pe^t+(1-p)\right)^{n-2}\right] \\ &= npe^t\left[\left(npe^t+(1-p)\right)\left(pe^t+(1-p)\right)^{n-2}\right] \end{aligned} \tag{A3}$$

[2]「連続型待ち時間分布」というのもあります．第７回の講義で説明します．

となります．よって $E(X) = M'_X(0) = np$ です．また，$E(X^2) = M''_X(0) = np((1-p)+np)$ となるので，$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = np((1-p)+np) - (np)^2 = np(1-p)$ となります．なお，ここでは

$$\begin{aligned} V(X) &= \sum_x (x - E(X))^2 P(X = x) \\ &= \sum_x \left(x^2 - 2xE(x) + \{E(X)\}^2\right) P(X - x) \\ &= \sum_x x^2 P(X - x) - 2E(X) \sum_x xP(X = x) + \{E(X)\}^2 \sum_x P(X = x) \\ &= E(X^2) - 2E(X) \cdot E(X) + \{E(X)\}^2 \cdot 1 = E(X^2) - \{E(X)\}^2 \end{aligned} \tag{A4}$$

という関係を用いました．

２項分布の極限としてのポアソン分布の導出

２項分布の式（(1) 式）を次のように変形します．

$$\begin{aligned} P(X = x) &= \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} \\ &= \frac{n(n-1)\cdots(n-(x-1))}{x!} p^x (1-p)^{n-x} \\ \text{（分母分子を } n^x \text{倍）} &= \frac{n(n-1)\cdots(n-(x-1))}{n^x x!} (np)^x (1-p)^{n-x} \\ \text{（} np = \lambda \text{だから）} &= \frac{n(n-1)\cdots(n-(x-1))}{n \cdot n \cdot \cdots \cdot n} \cdot \frac{\lambda^x}{x!} (1-p)^{n-x} \\ &= \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \cdots \cdot \frac{n-(x-1)}{n} \cdot \frac{\lambda^x}{x!} (1-p)^{n-x} \\ &= (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \cdots (1 - \frac{x-1}{n}) \cdot \frac{\lambda^x}{x!} (1-p)^{n-x} \\ &= \frac{(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \cdots (1 - \frac{x-1}{n})}{(1-p)^x} \cdot \frac{\lambda^x}{x!} (1-p)^n \end{aligned} \tag{A5}$$

ここで，$z = -p$ とおくと

$$\begin{aligned} (1-p)^n &= \left[(1-p)^{-\frac{1}{p}}\right]^{-np} = \left[(1-p)^{-\frac{1}{p}}\right]^{-\lambda} \\ &= \left[(1+z)^{\frac{1}{z}}\right]^{-\lambda} \end{aligned} \tag{A6}$$

と変形でき，$np = \lambda$ に固定して $n \to \infty$ とすると $p \to 0, z \to 0$ ですから，

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} (1-p)^n &= \lim_{p\to 0} \left[(1-p)^{-\frac{1}{p}}\right]^{-np} = \lim_{z\to 0} \left[(1+z)^{\frac{1}{z}}\right]^{-\lambda} \\ &= e^{-\lambda} \end{aligned} \tag{A7}$$

です[3]．また，$n \to \infty$ のとき $p \to 0$ であることより，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \cdots (1 - \frac{x-1}{n})}{(1-p)^x} = 1 \tag{A8}$$

です．(A5) 式に (A7)(A8) 式を適用すると

$$\lim_{n\to\infty} P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \tag{A9}$$

となり，二項分布の極限としてのポアソン分布が導かれます．

[3] 解析学の参考書を見てください．

幾何分布の期待値と分散の導出

幾何分布の式（(5) 式）から

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{x=1}^{\infty} xp(1-p)^{x-1} = p\sum_{x=1}^{\infty} x(1-p)^{x-1} \\
&= p\left[1\cdot(1-p)^0 + 2\cdot(1-p)^1 + 3\cdot(1-p)^2 + \cdots + k(1-p)^{k-1} + \cdots\right]
\end{aligned} \tag{A10}
$$

となるので，

$$
(1-p)E(X) = p\left[1\cdot(1-p)^1 + 2\cdot(1-p)^2 + 3\cdot(1-p)^3 + \cdots + k(1-p)^k + \cdots\right] \tag{A11}
$$

となります．よって，

$$
E(X) - (1-p)E(X) = p\left[(1-p)^0 + (1-p)^1 + (1-p)^2 + \cdots + (1-p)^k + \cdots\right] \tag{A12}
$$

ですが，[] 内は等比級数になっていますから，

$$
\begin{aligned}
E(X) - (1-p)E(X) = pE(X) &= p\cdot\frac{1}{1-(1-p)} \\
E(X) &= \frac{1}{p}
\end{aligned} \tag{A13}
$$

となります．同様に，(5) 式から

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{x=1}^{\infty} x^2 p(1-p)^{x-1} \\
&= p\left[1^2\cdot(1-p)^0 + 2^2\cdot(1-p)^1 + 3^2\cdot(1-p)^2 + \cdots + (k+1)^2(1-p)^k + \cdots\right]
\end{aligned} \tag{A14}
$$

であり，

$$
(1-p)E(X^2) = p\left[1^2\cdot(1-p)^1 + 2^2\cdot(1-p)^2 + 3^2\cdot(1-p)^3 + \cdots + k^2(1-p)^k + \cdots\right] \tag{A15}
$$

ですから，

$$
\begin{aligned}
E(X^2) - (1-p)E(X^2) &= p\left[(1^2-0^2)(1-p)^0 + (2^2-1^2)(1-p)^1 + \cdots + ((k+1)^2-k^2)(1-p)^k + \cdots\right] \\
E(X^2) &= \sum_{x=0}^{\infty}(2k+1)(1-p)^k
\end{aligned} \tag{A16}
$$

となります．よって

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= (2\times 0+1)(1-p)^0 + (2\times 1+1)(1-p)^1 + \cdots + (2\times k+1)(1-p)^k + \cdots \\
(1-p)E(X^2) &= (2\times 0+1)(1-p)^1 + (2\times 1+1)(1-p)^2 + \cdots + (2\times k+1)(1-p)^{k+1} + \cdots
\end{aligned} \tag{A17}
$$

ですから，

$$
\begin{aligned}
E(X^2) - (1-p)E(X^2) &= (1-p)^0 + 2(1-p)^1 + 2(1-p)^2 + \cdots + 2(1-p)^k + \cdots \\
pE(X^2) &= 1 + 2\cdot\frac{1-p}{1-(1-p)} \\
E(X^2) &= \frac{2-p}{p^2}
\end{aligned} \tag{A18}
$$

となり，

$$
V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{2-p}{p^2} - \left(\frac{1}{p}\right)^2 = \frac{1-p}{p^2} \tag{A19}
$$

が得られます．