

2008 年度前期 統計学で考える 総合演習

学生番号・氏名： _____

この用紙に、以下の2問の解答を書いて提出せよ。裏面にも解答を書いてよい。

1. 広島大学の学生から 50 人を無作為抽出し、ある法案についての賛否を問うと、27 人が賛成、23 人が反対と答えた。このとき、「広島大学全体で、過半数が賛成である」といえるか、有意水準 5% で検定せよ。
2. ある試験の受験者から 11 人を抽出して採点すると、点数の平均は 55、不偏分散は 81 であった。このとき、受験者全体の平均点の 99% 信頼区間を求めよ。ただし、講義で扱った手法を用いるために、この問題文にない仮定が必要な場合は、適宜必要な仮定を加えよ。

解答例

1. 広島大学の学生から n 人を抽出するとし、そのうち賛成の学生の数を S とする。また、広島大学全体での賛成の学生の割合を p とする。このとき、学生をひとり抽出することは、確率 p で賛成の学生を取り出すベルヌーイ試行であると考えられる。

このとき、

$$Z = \frac{S - np}{\sqrt{np(1-p)}} \quad (1)$$

は標準正規分布 $N(0, 1)$ にしたがう。

ここで、「 $p = 0.5$ である」という帰無仮説と「 $p > 0.5$ である」という対立仮説を考え、有意水準を 5% とする。帰無仮説が正しいとし、現在の状況である $n = 50, S = 27$ を (1) 式に代入すると、 $Z = 0.57$ となる。一方、正規分布表より、 $Z \geq 1.64$ である確率が 5% である。したがって、帰無仮説が正しいとしたとき、標本中の賛成の学生の数 S が現状 ($S = 27$) よりも大きくなる確率は、有意水準 (5%) よりも大きい。よって、帰無仮説は棄却されず、広大生全体で過半数が賛成であるとはいえない、という結論になる。

2. この試験の受験者全体の点数の分布が正規分布であるとし、受験者全体の平均点を μ 、抽出された標本の標本平均を \bar{X} 、不偏分散を s^2 、標本サイズを n とする。このとき、

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} \quad (2)$$

という値 (t 統計量) は自由度 $n - 1$ の t 分布にしたがうので、 $t_{0.005}(n - 1)$ を「 t 統計量はその値以上になる確率が 0.005 であるような値」とし、 $-t_{0.005}(n - 1)$ を「 t 統計量はその値以下になる確率が 0.005 であるような値」とすると、

$$P\left(\bar{X} - t_{0.005}(n - 1)\sqrt{\frac{s^2}{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{0.005}(n - 1)\sqrt{\frac{s^2}{n}}\right) = 0.99 \quad (3)$$

となるので、 μ の 99% 信頼区間は、(3) 式のかっこ内の区間となる。

問題文より $\bar{X} = 55$ 、 $s^2 = 81$ 、 $n = 11$ であり、また数表より $t_{0.005}(10) = 3.1693$ を (3) 式に代入すると、 μ の 99% 信頼区間は $[46.4, 63.6]$ となる。