2008 年度前期　統計データ解析Ａ

総合演習

学生番号・氏名：

この用紙に，以下の２問の解答を書いて提出せよ．裏面にも解答を書いてよい．

1. ある選挙で，投票所の出口で調査を行なって，10 人の投票者に質問したところ，X 候補に投票した人は 8 人であった．このとき，講義で説明した知識を使って，「X 候補の得票率は 70% 以上である」といえるかどうかを有意水準 5% で検定せよ．

2. Ｘ薬品の「Ｙ」という薬は，１つ１グラムの錠剤となっている．いま，10 個の錠剤を無作為抽出し，各々の錠剤に含まれる物質 P の量を調べた．その結果，各錠剤の物質 P の量（ミリグラム）は次の通りであった．

   1.2　0.8　0.9　0.9　1.0　1.3　1.2　1.0　0.8　0.9

   (a) 講義で説明した知識を使って，「薬Ｙに含まれる物質 P の割合」を区間推定するには，この測定がどのようなものであると仮定できる必要があるか．
   (b) (a) で答えた仮定が正しいとして，信頼係数 95% で (a) の区間推定を行なえ．

解答例

1. 各投票者は独立に投票しており，出口調査が無作為抽出になっていると仮定する．X候補の得票率を p とする．また，調査した投票者の数を n，うちX候補に投票した人の数を S とする．問題から，「p が 0.7 よりも大きい」といえるかどうかを調べるために，帰無仮説「$p = 0.7$」，対立仮説「$p > 0.7$」という検定を行なう．１回の調査で「X候補に投票した人が選ばれる」という事象は，確率 p で成功するベルヌーイ試行と考えられるので，n 回の調査を行なったときにX候補に投票した人が選ばれる回数 S は，２項分布 $B(n, p)$ にしたがう．よって，n が大きいとき，S は概ね正規分布 $N(np, np(1-p))$ にしたがうから，

$$Z = \frac{S - np}{\sqrt{np(1-p)}} \tag{1}$$

とおくと，Z は標準正規分布 $N(0, 1)$ にしたがう．

問題では $n = 10, S = 8$ で，そのとき

$$Z = \frac{8 - 10 \cdot 0.7}{\sqrt{10 \cdot 0.7 \cdot (1 - 0.7)}} = 0.69 \tag{2}$$

となる．この問題では， 対立仮説は「$p > 0.7$」であるから，「帰無仮説が正しいとしたとき，X候補に投票した人の数 $S = 8$ は多すぎる」かどうかを調べる必要があるので，$S \geqq 8$ である確率が小さいかどうかを調べる必要がある．$S \geqq 8$ である確率は (1)(2) 式から $Z \geqq 0.69$ となる確率と同じである．ここで，有意水準は 5% であり，数表から $Z \geqq 1.64$ となる確率が 5% であることがわかるので，$0.69 < 1.64$ より，$Z \geqq 0.69$ となる確率は 5%よりも大きい．したがって，有意水準 5%で，帰無仮説は棄却されず，「X候補の得票率は，70%以上だとはいえない」という結論となる．

2. (a) 薬Yの各錠に含まれる物質Pの割合が，正規分布にしたがっていること．

   (b) 薬Y全体での 1 グラムあたりの物質Pの量を μ，各錠剤での物質Pの量の平均を $\bar{X}$，不偏分散を s^2，標本サイズを n とする．このとき，問題文から，各錠剤が含む物質Pの量は，平均 μ の正規分布にしたがうと考えられる．したがって，

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} \tag{3}$$

   という値（t 統計量）は自由度 $n-1$ の t 分布 $t(n-1)$ にしたがうので，$t_{0.025}(n-1)$ を「t 統計量がその値以上になる確率が 0.025 であるような値」とし，$-t_{0.025}(n-1)$ を「t 統計量がその値以下になる確率が 0.025 であるような値」とすると

$$P\left(\bar{X} - t_{0.025}(n-1)\sqrt{\frac{s^2}{n}} \leqq \mu \leqq \bar{X} + t_{0.025}(n-1)\sqrt{\frac{s^2}{n}}\right) = 0.95 \tag{4}$$

   となるので，μ の 95%信頼区間は (4) 式のかっこ内の範囲となる．

   $X = (1.2 + 0.8 + \cdots + 0.8 + 0.9)/10 = 1.0$，$s^2 = \{(1.2 - 1.0)^2 + \cdots + (0.9 - 1.0)^2\}/(10 - 1) = 0.031$，$n = 10$，$t_{0.025}(9) = 2.262$ を (4) 式に代入すると，μ の 95% 信頼区間は $[0.87, 1.13]$（ミリグラム）となる．したがって，物質Pの割合は $[0.087, 0.113](\%)$ となる．