2011 年度秋学期　解析応用　第 2 回

第 1 部・フーリエ解析／　波とフーリエ級数

第 1 部では，関数を三角関数の和，すなわち「波」の重ね合わせととらえることで，その関数の性質を知る手法である「フーリエ解析」をとりあげます。その第 1 回は，まず周期関数を三角関数の和で表す**フーリエ級数**を説明します。

指数関数と三角関数

三角関数の和と言っていますが，以下では三角関数のかわりに指数関数を使って説明します。なぜならば，三角関数よりも指数関数のほうが計算が簡単だからです。

三角関数と指数関数の関係は，次の**オイラーの式**で表されます。

$$e^{i\omega} = \cos\omega + i\sin\omega. \tag{1}$$

i は虚数単位で，$e^{i\omega}$ は $\exp(i\omega)$ とも書きます。この関係は，複素数 z に対して指数関数 e^z がテイラー展開を使って

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots \tag{2}$$

と定義されるので，$z = i\omega$ のときは

$$\begin{aligned} e^{i\omega} &= 1 + \frac{(i\omega)}{1!} + \frac{(i\omega)^2}{2!} + \cdots + \frac{(i\omega)^n}{n!} + \cdots \\ &= (1 - \frac{\omega^2}{2!} + \frac{\omega^4}{4!} - \cdots) + i(\frac{\omega}{1!} - \frac{\omega^3}{3!} + \cdots) \\ &= \cos\omega + i\sin\omega \end{aligned} \tag{3}$$

となるからです。

そこで，三角関数の代わりに，指数関数を使って波を表すことにします。けっして，実数の世界の波が複素数の世界に広がったわけではありません。あくまで，指数関数のほうが計算が楽だから，というだけの理由です。ただし，1 つの指数関数には 2 つの三角関数が含まれていますから，多少おかしなことにはなりますが，それは後で説明します。

フーリエ級数

関数 $f(x)$ を，周期 L の周期関数，すなわち間隔 L で同じ形を繰り返す関数であるとしましょう。これがさまざまな周波数の正弦波の重ね合わせでできていると仮定してみます。このとき，重ね合わされるそれぞれの波も，いずれも周期 L で繰り返す波でなければならないはずです。そうでなければ，x を先へ進めていくと，重ね合わされる波がだんだんずれていってしまうからです。

周期 L の波には，基本周期が L である波だけでなく，基本周期が $L/2, L/3, L/4, \ldots$ のように $L/$(整数) である波もあります。周期が $L/$(整数) の波は，整数の個数と同じだけありますが，それぞれの基本周期はとびとび（離散的）ですから，これらの波の数はたとえ無限個であっても「数えることのできる無限個」（可算無限個）です。いいかえれば，「重ね合わせ」を無限個の項の和の形（級数）で書くことができる，ということになります。

周期 L/n の正弦波は，指数関数を使って $\exp(i2\pi \frac{n}{L}x)$ と表すことができます。2π をかけているのは，L/n が周期であることから，n/L が「単位時間あたり何周期分の波が入っているか」すなわち**周波数**を表しているので，これに 2π をかければ「単位時間あたり何ラジアン位相が進むか」を表すといいかえることができるからです。$2\pi(n/L)$ を**角周波数** (angular frequency) ということもあります。

このような指数関数による表現を用いると，関数 $f(x)$ は，次のような級数で表されます。

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(i2\pi \frac{n}{L}x\right) \tag{4}$$

さて，上の指数関数には，「同じ基本周期の波をかけあわせて，周期 L にわたって積分したときは 0 にならず，異なる基本周期の波をかけあわせて積分すると 0 になる」という性質があります。なぜならば，この積分は，m, n を整数として

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \exp\left(i2\pi \frac{m}{L}x\right) \exp\left(-i2\pi \frac{n}{L}x\right) dx = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \exp\left(i2\pi \frac{m-n}{L}x\right) dx \tag{5}$$

と表され[1]，$m \neq n$ のときは，この積分は

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{i2\pi\frac{m-n}{L}} \left[\exp\left(i2\pi \frac{m-n}{L}x\right)\right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \\
&= \frac{1}{i2\pi\frac{m-n}{L}} \left\{\exp\left(i2\pi \frac{m-n}{L}\frac{L}{2}\right) - \exp\left(-i2\pi \frac{m-n}{L}\frac{L}{2}\right)\right\} \\
&= \frac{L}{m-n} \sin \pi(m-n)L = 0
\end{aligned} \tag{6}$$

であり，$m = n$ のときは

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \exp(0) dx = [x]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = L \tag{7}$$

となるからです。この積分を 2 つの波の**内積**とよびます。また，このような性質をもつ関数のグループを**直交関数系**とよびます。

さて，関数 $f(x)$ と上の指数関数を使って，次の計算をしてみましょう。k は整数とします。

$$\frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x) \exp\left(-i2\pi \frac{k}{L}x\right) dx \tag{8}$$

$f(x)$ は (4) 式の級数で表されますから，上の積分は

$$\frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(i2\pi \frac{n}{L}x\right) \exp\left(-i2\pi \frac{k}{L}x\right) dx \tag{9}$$

となりますが，上で示した直交性から，級数のうち周期が k/L の項以外は積分すれば 0 であり，その結果，(8) 式の積分は

$$\frac{1}{L} \cdot L a_k = a_k \tag{10}$$

---

[1] $\exp\left(-i2\pi \frac{n}{L}x\right)$ のほうの i の前に $-$ がついているのは，複素共役をとっているためです。

となります。このことは，関数 $f(x)$ を (4) 式の級数による波の足し合わせで表したとき，それぞれの波の係数は (8) 式で求められることを表しています。(4) 式の級数を，関数 $f(x)$ の**フーリエ級数展開**とよび，(8) 式で求められる係数を，周期 L/k の波の**フーリエ係数**とよびます。

負の周波数

今日の最初に，三角関数のかわりに指数関数で波を表すことを説明しました。計算を楽にするためにこのようにしたのですが，その代わりに，下記のように「負の周波数」が現れるという問題があります。

オイラーの式（(1) 式）から，逆に三角関数を指数関数で表すと，次のようになります。

$$\begin{aligned} \cos\omega &= \frac{\exp(i\omega)+\exp(-i\omega)}{2} \\ \sin\omega &= \frac{\exp(i\omega)-\exp(-i\omega)}{2i}. \end{aligned} \tag{11}$$

よって，１つの正弦波 $a_1\cos 2\pi\nu_1 x$ は，指数関数で表現すると，

$$a_1\cos 2\pi\nu_1 x = \frac{a_1}{2}\exp(i2\pi\nu_1 x) + \frac{a_1}{2}\exp(i2\pi(-\nu_1)x), \tag{12}$$

となります。したがって，この関数のフーリエ係数は，ν_1 と $-\nu_1$ の正負２つの周波数に対応して，それぞれ $a_1/2$ となります。つまり，「ひとつのコサイン関数で表される波は，正負の２つの周波数の組で表現される」ことがわかります。

ところで，周波数が同じで，θ だけ位相がずれた波を考えると，

$$\begin{aligned} & a_1\cos(2\pi\nu_1 x+\theta) \\ = \ & \frac{a_1}{2}\exp(i(2\pi\nu_1 x+\theta)) + \frac{a_1}{2}\exp(-i(2\pi\nu_1 x+\theta)) \\ = \ & \frac{a_1}{2}\exp(i2\pi\nu_1 x)\exp(i\theta) + \frac{a_1}{2}\exp(i2\pi(-\nu_1)x)\exp(-i\theta) \end{aligned} \tag{13}$$

となります。この場合，ν_1 と $-\nu_1$ の正負２つの周波数に対応するフーリエ係数は，それぞれ $\dfrac{a_1}{2}\exp(i\theta)$ および $\dfrac{a_1}{2}\exp(-i\theta)$ となります。(13) 式の場合，これらの係数を複素数の振幅と位相で表すと，振幅は (12) 式と同じで，ν_1 と $-\nu_1$ の正負２つの周係数 $a_1/2$ が現れます。一方，位相については，ν_1 と $-\nu_1$ の正負２つの周波数に，係数 θ と $-\theta$ が現れます。つまり，波の位相が，周波数空間では複素数の位相として現れます。

このようにして，「負の周波数」という奇妙なものを受け入れれば，複素数を用いて波を表現できることがわかります。

例題

次の問題を考えてみましょう。

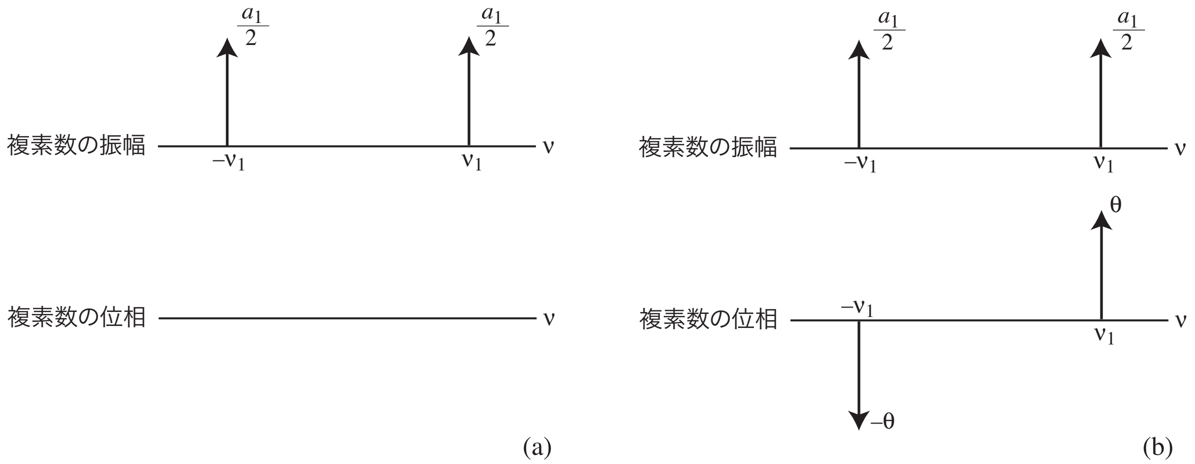

図 1: 波の位相の周波数空間での表現. (a) $a_1 \cos 2\pi\nu_1 x$. (b) $a_1 \cos(2\pi\nu_1 x + \theta)$.

次の関数のフーリエ級数展開を求めよ。

$$
\begin{gathered}
f(x) = \begin{cases} -1 & -\frac{L}{2} < x < 0 \\ 1 & 0 < x < \frac{L}{2} \end{cases} \\
f(x+L) = f(x)
\end{gathered}
\tag{14}
$$

(8) 式で求められるフーリエ係数 a_k は

$$
a_k = \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \exp(-i2\pi\frac{k}{L}x)dx \tag{15}
$$

で表されます。この式を計算すると

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{0}(-1)\exp(-i2\pi\frac{k}{L}x)dx + \frac{1}{L}\int_{0}^{\frac{L}{2}}(+1)\exp(-i2\pi\frac{k}{L}x)dx \\
&= -\frac{1}{L}\left[\frac{L}{-i2\pi k}\exp(-i2\pi\frac{k}{L}x)\right]_{-\frac{L}{2}}^{0} + \frac{1}{L}\left[\frac{L}{-i2\pi k}\exp(-i2\pi\frac{k}{L}x)\right]_{0}^{\frac{L}{2}} \\
&= \frac{1}{i2\pi k}\left[1-\exp(i\pi k)\right] + \frac{1}{-i2\pi k}\left[\exp(-i\pi k)-1\right] \\
&= \frac{1}{i\pi k} - \frac{1}{i2\pi k}\left\{\exp(i\pi k)+\exp(-i\pi k)\right\} \\
&= \frac{1}{i\pi k}\left\{1-\frac{\exp(i\pi k)+\exp(-i\pi k)}{2}\right\} \\
&= \frac{1}{i\pi k}\left\{1-\cos(\pi k)\right\}
\end{aligned}
\tag{16}
$$

となります。k が偶数のときは, $\cos(\pi k) = 1$ ですから, $a_k = 0$ です。また, k が奇数のときは, $\cos(\pi k) = 0$ ですから, $a_k = \dfrac{2}{i\pi k}$ となります。

これでフーリエ係数が求められたので，フーリエ級数展開も求められたことになりますが，もう少し先を計算してみましょう。フーリエ級数展開は，(4) 式から

$$f(x) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} \frac{2}{i\pi(2t+1)} \exp(i2\pi \frac{(2t+1)}{L} x) \tag{17}$$

となります。この式をさらに計算すると

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2}{i\pi} \exp(i2\pi \frac{x}{L}) - \frac{2}{i\pi} \exp(-i2\pi \frac{x}{L}) \\ &\quad + \frac{2}{3i\pi} \exp(i2\pi \frac{3x}{L}) - \frac{2}{3i\pi} \exp(-i2\pi \frac{3x}{L}) \\ &\quad + \cdots \\ &= \frac{4}{\pi} \left\{ \frac{\exp(i2\pi \frac{x}{L}) - \exp(-i2\pi \frac{x}{L})}{2i} \right\} \\ &\quad + \frac{4}{3\pi} \left\{ \frac{\exp(i2\pi \frac{3x}{L}) - \exp(-i2\pi \frac{3x}{L})}{2i} \right\} \\ &\quad + \cdots \\ &= \frac{4}{\pi} \sin(2\pi \frac{x}{L}) + \frac{4}{3\pi} \sin(2\pi \frac{3x}{L}) + \cdots \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} \frac{4}{(2t+1)\pi} \sin(2\pi \frac{(2t+1)x}{L}) \end{aligned} \tag{18}$$

となります。(14) 式のような「凸凹」の関数が，正弦関数の足し算で表されるのは，ちょっと不思議なことです。また，この関数は奇関数（$f(x) = -f(-x)$ がなりたつ）で，そのときは指数関数に含まれる sin と cos のうち sin だけが現れます。これは，sin も奇関数であるためです。同様に，偶関数（$f(x) = f(-x)$ がなりたつ）の場合は cos だけが現れます。

参考文献

H. P. スウ（佐藤平八訳）フーリエ解析，森北出版，ISBN4-627-93010-0.