

なんか、だまされているような気がする

前回、関数 $f(x)$ を、周期 $\frac{L}{n}$ の波を表す指数関数 $\exp(i2\pi \frac{n}{L}x)$ の級数で

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(i2\pi \frac{n}{L}x\right) \quad (1)$$

と表し、さらにフーリエ係数 a_k は指数関数の直交性を使って

$$a_k = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x) \exp\left(-i2\pi \frac{k}{L}x\right) dx \quad (2)$$

という積分で求められる、と説明しました。

しかし、この話は重要な点をごまかしています。(1) 式の級数を示したときには、「 $f(x)$ が波の足し合わせであるとすれば、級数の各項は周期 $L, L/2, L/3, \dots$ の波でしかありえない」といっただけで、この級数が $f(x)$ に収束するとはひとつも言っていない。

そこで、今回の講義では、この級数が本当に $f(x)$ に収束するのか、おかしいことになることはないのか、について説明します。実は、多少おかしいことになる場合もあります。

フーリエ級数の収束性

結論からいうと、フーリエ級数の収束性は次の **Dirichlet (ディリクレ) の定理** で表されます。

周期 L の周期関数 $f(x)$ のフーリエ係数 a_k が (2) 式で定義されるとき、 $f(x)$ が「区分的になめらか」であれば、(1) 式のフーリエ級数は

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \quad (3)$$

に収束する。

ここで、「任意の有界な区間において、 $f(x)$ の不連続点はあっても有限個で、その不連続点では左からの極限も右からの極限も存在する」ことを「 $f(x)$ は区分的に連続」といいます。そして、 $f(x)$ も $f'(x)$ も区分的に連続なとき、「 $f(x)$ は区分的になめらか」といいます。直感的に言えば、「段差や折り目はあがるが、ちぎれてしまっているところはない」ということです。

また、 $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$ は、 $f(x)$ の連続点では $f(x)$ そのもの、不連続点では、左からの極限と右からの極限の平均を意味します。ですから、フーリエ級数は「たいてい」もとの関数 $f(x)$ に収束するが、段差のところでは少しだけ違うものになる、ということになります。

Riemann-Lebesgue の定理と、積分の収束

Dirichlet の定理を証明するのに必要なのが、次の **Riemann-Lebesgue (リーマン・ルベグ) の定理** です。

$f(x)$ が区分的に連続のとき、任意の a, b について

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \int_a^b f(x) \exp(-inx) dx = 0 \quad (4)$$

がなりたつ。

この定理にある積分は、フーリエ係数を定義した (2) 式と同じ形になっています。つまり、この定理は「周波数が無限に大きくなると、フーリエ係数は 0 に収束する」ことを示しています。波が十分に細かければ、 $f(x)$ が (区分的に連続であれば) 何であっても、波の山と谷が打ち消しあって積分すると消えてしまう、というのが直感的イメージです。

この定理を、 $n \rightarrow +\infty$ の場合に証明します。

$$F = \int_a^b f(x) \exp(-inx) dx \quad (5)$$

とおきます。この積分で、 $x = t + \frac{\pi}{n}$ と置換すると、 $dx = dt$ で、 $x = a$ のとき $t = a - \frac{\pi}{n}$ 、 $x = b$ のとき $t = b - \frac{\pi}{n}$ ですから

$$\begin{aligned} F &= \int_{a-\frac{\pi}{n}}^{b-\frac{\pi}{n}} f\left(t + \frac{\pi}{n}\right) \exp\left(-in\left(t + \frac{\pi}{n}\right)\right) dt \\ &= \int_{a-\frac{\pi}{n}}^{b-\frac{\pi}{n}} f\left(t + \frac{\pi}{n}\right) \exp(-int) \exp\left(-in\frac{\pi}{n}\right) dt \\ &= - \int_{a-\frac{\pi}{n}}^{b-\frac{\pi}{n}} f\left(t + \frac{\pi}{n}\right) \exp(-int) dt \end{aligned} \quad (6)$$

です。積分変数は何でもいいので、(6) 式についても積分変数を x にしましょう。これらの和をとり、積分区間ごとに 3 つの項に分けると

$$\begin{aligned} 2F &= \int_a^b f(x) \exp(-inx) dx - \int_{a-\frac{\pi}{n}}^{b-\frac{\pi}{n}} f\left(x + \frac{\pi}{n}\right) \exp(-inx) dx \\ &= - \int_{a-\frac{\pi}{n}}^a f\left(x + \frac{\pi}{n}\right) \exp(-inx) dx + \int_a^{b-\frac{\pi}{n}} \left\{ f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{n}\right) \right\} \exp(-inx) dx + \int_{b-\frac{\pi}{n}}^b f(x) \exp(-inx) dx \end{aligned} \quad (7)$$

となります。 $f(x)$ が区分的に連続ということは、どんな有界な区間をとっても、その間の点で右からの極限も左からの極限も存在するので、 $f(x)$ は有界です。したがって、 $n \rightarrow \infty$ のとき、第 1 項と第 3 項は積分区間の幅が 0 になるので積分の値も 0 に収束します。

第 2 項も、 $f(x)$ が区分的に連続なので、積分区間を $f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{n}\right)$ が連続である区間に分割することができます。それぞれの区間では $n \rightarrow \infty$ のとき $f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{n}\right)$ は 0 に収束するので、第 2 項も 0 に収束します。■

ところで、さきほど「直感的イメージ」として、「山と谷が打ち消しあって、積分すると 0」と述べました。しかし、 $f(x)$ に段差があるところでは、本当にそのイメージでいいのでしょうか。 $f(x)$ が連続なところでは、波を十分細かくすれば山と谷は打ち消し合いますが、段差のところでは、いくら波を細かくしても、段差の両側では差し引きすることができません。それでも積分としてはやはり 0 に収束するのは、周波数が無限に大きくなると、今度は差し引きできない部分の幅が 0 に近づくので、積分には影響しなくなってしまうからです。

フーリエ級数の収束性

では、フーリエ級数の収束性、すなわち Dirichlet の定理を証明します。式を簡単にするために、周期 L を、それが 2π になるような適当な単位で表すことにすると、(1) 式のフーリエ級数は

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp(inx) \quad (8)$$

となり¹、フーリエ係数は

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \exp(-ikx) dx \quad (9)$$

となります。

(8) 式のフーリエ級数の部分和を $S_n(x)$ とすると

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^n a_k \exp(ikx) \quad (10)$$

となります。これに (9) 式のフーリエ係数を代入すると

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^n \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \exp(-ikt) dt \right\} \exp(ikx) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{k=-n}^n \exp(-ik(t-x)) dt \quad (11)$$

で、この式の総和の部分は、初項 $\exp(in(t-x))$ 、公比 $\exp(-i(t-x))$ 、項数 $2n+1$ の等比数列の和なので、

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\exp(in(t-x)) [1 - \exp(-i(t-x)(2n+1))]}{1 - \exp(-i(t-x))} dt \quad (12)$$

となります。ここで $t-x=s$ と変数変換すると

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-x-\pi}^{-x+\pi} f(x+s) \frac{\exp(ins) [1 - \exp(-i(2n+1)s)]}{1 - \exp(-is)} ds \quad (13)$$

となり、さらに分母分子に $\exp\left(\frac{is}{2}\right)$ をかけると

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-x-\pi}^{-x+\pi} f(x+s) \frac{\exp\left(\frac{is}{2}\right) \{\exp(ins) - \exp(-i(n+1)s)\}}{\exp\left(\frac{is}{2}\right) - \exp\left(\frac{-is}{2}\right)} ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-x-\pi}^{-x+\pi} f(x+s) \frac{\exp\left(i\left(n+\frac{1}{2}\right)s\right) - \exp\left(-i\left(n+\frac{1}{2}\right)s\right)}{\exp\left(\frac{is}{2}\right) - \exp\left(\frac{-is}{2}\right)} ds \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-x-\pi}^{-x+\pi} f(x+s) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)s}{2 \sin \frac{s}{2}} ds \end{aligned} \quad (14)$$

となります。ここに現れている関数は、すべて周期 2π の周期関数ですから、積分区間を $[-\pi, \pi]$ にしても「1 周期分」積分していることには変わりありません。よって、

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+s) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)s}{2 \sin \frac{s}{2}} ds \quad (15)$$

¹等号でなく \sim を使っているのは、右辺が $f(x)$ に収束するかどうかまだわからない、という意味を強調しています。

となります²。

さて、この先の話を進めるために $\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin(n + \frac{1}{2})s}{2 \sin \frac{s}{2}} ds$ の値を求めます。三角関数の積和の公式より、

$$2 \cos ks \sin \frac{s}{2} = \sin \left(k + \frac{1}{2} \right) s - \sin \left(k - \frac{1}{2} \right) s \quad (16)$$

という関係が得られます。そこで、

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} + \cos s + \cos 2s + \cdots + \cos ns \right) \sin \frac{1}{2}s \\ &= \frac{1}{2} \left[\sin \frac{1}{2}s + 2 \cos s \sin \frac{1}{2}s + 2 \cos 2s \sin \frac{1}{2}s + \cdots + 2 \cos ns \sin \frac{1}{2}s \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\sin \frac{1}{2}s + \left(\sin \frac{3}{2}s - \sin \frac{1}{2}s \right) + \left(\sin \frac{5}{2}s - \sin \frac{3}{2}s \right) + \cdots + \left(\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) s - \sin \left(n - \frac{1}{2} \right) s \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) s \end{aligned} \quad (17)$$

となるので、

$$\frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) s}{2 \sin \frac{1}{2}s} = \frac{1}{2} + \cos s + \cos 2s + \cdots + \cos ns \quad (18)$$

となります。よって、

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) s}{2 \sin \frac{s}{2}} ds = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} + \cos s + \cos 2s + \cdots + \cos ns \right) ds = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \pi = \frac{1}{2} \quad (19)$$

が得られます。同様に、

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) s}{2 \sin \frac{s}{2}} ds = \frac{1}{2} \quad (20)$$

も得られます。

さて、上の2つの式から、

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x-0) \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) s}{2 \sin \frac{s}{2}} ds + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x+0) \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) s}{2 \sin \frac{s}{2}} ds \quad (21)$$

とすることができます。一方、(15)式から

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x+s) \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) s}{2 \sin \frac{s}{2}} ds + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x+s) \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) s}{2 \sin \frac{s}{2}} ds \quad (22)$$

です。よって、

$$\begin{aligned} S_n(x) &- \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{f(x+s) - f(x-0)}{2 \sin \frac{s}{2}} \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) s ds + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x+s) - f(x+0)}{2 \sin \frac{s}{2}} \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) s ds \end{aligned} \quad (23)$$

²この式の $\frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) s}{2 \sin \frac{s}{2}}$ をディリクレ核とよびます。

ここで、 $\frac{f(x+s)-f(x-0)}{2\sin\frac{s}{2}}$ と $\frac{f(x+s)-f(x+0)}{2\sin\frac{s}{2}}$ がどちらも積分区間で区分的に連続なら、Riemann-Lebesgue の定理により³、 $n \rightarrow \infty$ のとき右辺は 0 に収束するので、Dirichlet の定理が証明されます。そこはどのようにでしょうか。

$\frac{f(x+s)-f(x-0)}{2\sin\frac{s}{2}}$ について考えると、 $f(x)$ は区分的に連続ですから、 $s = -0$ 以外では区分的に連続なのが明らかです。問題は $s = -0$ のときですが、この式について $s \rightarrow -0$ の極限を求めると

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow -0} \frac{f(x+s)-f(x-0)}{2\sin\frac{s}{2}} &= \lim_{s \rightarrow -0} \frac{f(x+s)-f(x-0)}{s} \cdot \frac{\frac{s}{2}}{\sin\frac{s}{2}} \\ &= \lim_{s \rightarrow -0} \frac{f(\{x-0\}+s)-f(x-0)}{s} \cdot \frac{\frac{s}{2}}{\sin\frac{s}{2}} \end{aligned} \quad (24)$$

となります。右辺の積の前半は微分の形になっていて、極限は $f'(x-0)$ になります⁴。 $f(x)$ は区分的になめらかですから、導関数 $f'(x)$ は区分的に連続で、有界な $f'(x-0)$ が存在します⁵。一方、右辺の積の後半については、 $s \rightarrow 0$ のとき $\frac{\frac{s}{2}}{\sin\frac{s}{2}} \rightarrow 1$ です。よって、(24) 式の極限が存在するので、 $\frac{f(x+s)-f(x-0)}{2\sin\frac{s}{2}}$ は区分的に連続です。 $\frac{f(x+s)-f(x+0)}{2\sin\frac{s}{2}}$ についても同様です。

以上で、Dirichlet の定理が証明されました。周期関数 $f(x)$ のフーリエ級数は「たいてい」もとの $f(x)$ に収束するが、段差のところでは「左からの極限と右からの極限の平均」になることがわかります。

前回の例題では、

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -\frac{L}{2} < x < 0 \\ 1 & 0 < x < \frac{L}{2} \end{cases} \quad (25)$$

$$f(x+L) = f(x)$$

ですから、 $x = \dots - 2L, -L, 0, L, 2L, \dots$ で段差があり、そのときフーリエ級数は 0 です。上の $f(x)$ は、 $x = \dots - 2L, -L, 0, L, 2L, \dots$ では定義されていませんが、フーリエ級数はこれらの点で +1 と -1 の平均すなわち 0 に収束します。

ただし、段差の前後では、Riemann-Lebesgue の定理のところで触れたように、「波の山と谷が打ち消し合うのではなく、山や谷の幅が限りなく狭くなる」という現象がおきます。級数を途中で打ち切ると、段差の前後だけ波が残ります⁶。「段差においてはフーリエ級数が段差の前後の平均に収束する」という結論は、段差の前後に残った波が、幅が限りなく狭くなった結果、互いに打ち消し合ってそれらの平均に収束する、と理解することができます。

参考文献

千葉逸人、これならわかる 工学部で学ぶ数学、プレアデス出版、ISBN4-7687-0882-X
 山本稔、微分方程式とフーリエ解析、学術図書出版、ISBN978-4-87361-117-4 (絶版)
 富山大学理学部幸山研究室、2007 年度「離散数理」第 6 回「フーリエ変換 (3)」<http://kouyama.math.u-toyama.ac.jp/main/education/2007/discmath/>

³(4) 式の指数関数を cos と sin に分けて考えます。

⁴ $f'(x)$ ではないことに注意。

⁵ $f'(x)$ は、存在しない点があるかもしれません。

⁶数学では**ギブスの現象**、信号処理では**リングング**といいます。