2011 年度秋学期　解析応用　第４回

第１部・フーリエ解析／　フーリエ積分とフーリエ変換

フーリエ積分とフーリエ変換

ここまでは，周期関数を三角関数（虚数指数の指数関数）の級数，すなわち「波の足し合わせ」で表したフーリエ級数について説明しました。では，元の関数が，周期関数でない一般の関数のときは，どうなるでしょうか。

この場合は，「周期が無限大である」と考えます。すなわち，前回の例では，周期関数 $f(x)$ の周期を L としましたが，今回は $L \to \infty$ となったときの極限を考えます。

フーリエ級数の式

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(i2\pi\frac{n}{L}x\right) \tag{1}$$

は，関数 $f(x)$ が基本周期が $L, L/2, L/3, \ldots, L/n, \ldots$ の波の足し合わせであることを示しています。ここで L が大きくなると，n/L と $(n+1)/L$ の差 $1/L$ は小さくなります。このことは，$f(x)$ をフーリエ級数で表したとき，隣り合う波の周波数の差は小さくなってゆくことを示しています。

そこで，この周波数の差 $1/L$ を $\Delta\nu$ で表すことにします。このとき，上のフーリエ級数の式と，フーリエ係数の式

$$a_k = \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x)\exp\left(-i2\pi\frac{k}{L}x\right)dx \tag{2}$$

をあわせると，上の $\Delta\nu$ を使って

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\Delta\nu\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(\tau)\exp\left(-i2\pi n\Delta\nu\tau\right)d\tau\right)\exp\left(i2\pi n\Delta\nu x\right) \tag{3}$$

となります。$n\Delta\nu$ は，（周波数の差）$\times$（項の個数）ですからある周波数をさします。これを，周波数 ν で表します。また，$L \to \infty$ のとき $\Delta\nu \to 0$ ですから，$\Delta\nu$ を含む総和は，$d\nu$ を含む積分になります。よって，

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\exp\left(-i2\pi\nu\tau\right)d\tau\right)\exp\left(i2\pi\nu x\right)d\nu \tag{4}$$

が得られます。$f(x)$ は，もはや「波の足し合わせ」とはいえず，積分で表されることになりました。これを**フーリエ積分**といいます。

フーリエ積分を，

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp\left(-i2\pi\nu x\right)dx \tag{5}$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu)\exp\left(i2\pi x\nu\right)d\nu \tag{6}$$

のように分けて表すとき, (5) 式を**フーリエ変換** (Fourier transformation), (6) 式を**逆フーリエ変換** (inverse Fourier transformation) とよびます。関数 $F(\nu)$ は，もとの関数 $f(x)$ に，どのような周波数の波がどの程度含まれているかを表しています。上で述べたように，フーリエ級数において $T \to \infty$ としたので，級数で隣接する波の間隔が 0 に近づいていきます。したがって，フーリエ係数の並び $\{a_k\}$ は，ついに実数の周波数 ν の関数 $F(\nu)$ に達するわけです。

$f(x)$ が存在する空間を**実空間**，$F(\nu)$ が存在する空間を**周波数空間**とよびます。また，$f(x)$ と $F(\nu)$ を**フーリエ変換対**とよびます。$f(x)$ のフーリエ変換を $FT[f(x)](\nu)$ あるいは $\mathscr{F}[f(x)](\nu)$ と，また $F(\nu)$ の逆フーリエ変換を $FT^{-1}[F(\nu)](x)$ あるいは $\mathscr{F}^{-1}[F(\nu)](x)$ と書くこともあります。

なんかごまかされている気がする

級数とは可算無限個の項の和ですから，その「間隔」がいくら縮まっても，可算無限個であることにかわりはなく，その「隙間」がくっついて連続にはならないはずです。「フーリエ係数の並び $\{a_k\}$ は，ついに実数の周波数 ν の関数 $F(\nu)$ に達する」というのは変ではないでしょうか？

$F(\nu)$ が実数で定義された関数で表されるのは，(3) 式で級数の中に $\Delta\nu$ という「間隔」が入っているからです。$\Delta\nu$ は隣同士の波の周波数の差ですから，上で述べた「隙間」は $\Delta\nu$ によってもともと埋まっていた，ということになります。

この部分を「幅がないのに積分すると 1」という変な関数を導入して，うまく整理してしまったのが，後で述べるデルタ関数です。

本当に収束するのか？

フーリエ級数が本当は $f(x)$ そのものではなく $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ に収束するように，フーリエ積分も，本当は (4) 式の左辺は $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ になります。また，(4) 式がなりたつのは，$f(x)$ はフーリエ級数の場合と同様に区分的になめらかで，かつ絶対可積分，すなわち

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx \tag{7}$$

のときです。この「絶対可積分」の条件は，フーリエ積分の収束を証明するためには積分の順序交換が必要で，そのためには $|F(\nu)|$ が一様収束する必要があり，その条件が $f(x)$ の絶対可積分なのですが，詳細は省略します。なお，これもデルタ関数とのからみで，「絶対可積分でない」関数のフーリエ変換があとで出てきます[1]。

フーリエ変換に関する諸定理

以下，$F(\nu) = FT[f(x)](\nu), G(\nu) = FT[g(x)](\nu)$ とします。

線形性

「和・定数倍のフーリエ変換」=「フーリエ変換の和・定数倍」です。

$$FT[af(x) + bg(x)] = aF(\nu) + bG(\nu). \tag{8}$$

フーリエ変換の定義から明らかです。■

[1] 例えば文献 [3] を参照してください。ここを省略してしまうのは，絶対可積分でない関数に拡張されたフーリエ変換のほうが応用上おもしろいからです。

拡大・縮小

「実空間での拡大（縮小)」=「周波数空間での縮小（拡大)」です。

$$FT[f(ax)] = \frac{1}{|a|}F(\frac{\nu}{a}). \tag{9}$$

なぜならば,

$$FT[f(ax)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(ax)\exp\left(-i2\pi\nu x\right)dx \tag{10}$$

で，$ax = t$ と置換すると，$x = \frac{t}{a}, adx = dt$ ですから

$$\begin{aligned} FT[f(ax)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp\left(-i2\pi\frac{\nu t}{a}\right)\frac{1}{a}dt \\ &= \frac{1}{a}F(\frac{\nu}{a}) \end{aligned} \tag{11}$$

となるからです。■

シフト

「実空間での移動」=「周波数空間での位相のずれ」,「実空間での変調（波に関数をかけ算する)」=「周波数空間での移動」です。

$$\begin{aligned} FT[f(x-a)] &= F(\nu)\exp(-i2\pi a\nu) \\ FT[f(x)\exp(i2\pi\nu_0 x)] &= F(\nu-\nu_0). \end{aligned} \tag{12}$$

なぜならば，上の式は

$$FT[f(x-a)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-a)\exp\left(-i2\pi\nu x\right)dx \tag{13}$$

で，$x - a = t$ と置換すると，$x = t + a, dx = dt$ ですから

$$\begin{aligned} FT[f(x-a)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp\left(-i2\pi(t+a)\nu\right)dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp\left(-i2\pi t\nu\right)dt\cdot\exp\left(-i2\pi a\nu\right) \\ &= F(\nu)\exp\left(-i2\pi a\nu\right) \end{aligned} \tag{14}$$

となるからです。下の式も同様です。■

積とコンヴォリューション

「積のフーリエ変換」=「フーリエ変換のコンヴォリューション」,「コンヴォリューションのフーリエ変換」=「フーリエ変換の積」です。

$$\begin{aligned} FT[f(x)g(x)](\nu) &= [F*G](\nu) \\ FT[\{f*g\}(x)](\nu) &= F(\nu)G(\nu). \end{aligned} \tag{15}$$

ここで，記号「$*$」で表されるコンヴォリューション（convolution, 畳み込み積分）は，

$$\{f * g\}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(t-y)dy \tag{16}$$

と定義されます。コンヴォリューションの意味は，デルタ関数を使って説明すると理解しやすいので，そのときに説明します。

証明は以下のとおりです。逆フーリエ変換の式（(6) 式）から，

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu)\exp(i2\pi\nu x)d\nu \int_{-\infty}^{\infty} G(\mu)\exp(i2\pi\mu x)d\mu \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(\nu)G(\nu)d\nu\exp(i2\pi(\nu+\mu)x)d\mu \end{aligned} \tag{17}$$

となります。ここで $\nu + \mu = \xi$ と変数変換すると

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(\nu)G(\xi-\nu)d\nu\exp(i2\pi\xi x)d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [F * G](\xi)\exp(i2\pi\xi x)d\xi \\ &= FT^{-1}[F * G](x) \end{aligned} \tag{18}$$

となるので，(18) 式の逆変換を考えると (15) 式の上の式が得られます。下の式も，フーリエ変換と逆変換を入れ替えれば同様に証明されます。■

Parseval の等式

$f(x)$ が実関数で，２乗可積分すなわち

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < +\infty \tag{19}$$

であるとき，

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\nu)|^2 d\nu \tag{20}$$

がなりたちます。これを Parseval（パーシヴァル）の等式といいます。これは，実空間での関数を何かの波動と考えると，その波動全体のもつエネルギーと，周波数空間での各周波数の波のエネルギーの合計が等しいことを意味しています。

証明は以下のとおりです。以下，$g(x)$ も実関数とします。上のコンヴォリューションに関する定理から

$$\begin{gathered} FT[f(x)g(x)] = [F * G](\nu) \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)\exp(-i2\pi\nu x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(y)G(\nu-y)dy \end{gathered} \tag{21}$$

で，ここで $\nu = 0$ とおくと

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(y)G(-y)dy \tag{22}$$

となります。G^* を G の複素共役とすると，

$$
\begin{aligned}
G^*(\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\exp(i2\pi\nu x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\exp(-i2\pi(-\nu)x)dx \\
&= G(-\nu)
\end{aligned}
\tag{23}
$$

ですから，(22) 式から

$$
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(y)G^*(y)dy \tag{24}
$$

が得られ，$f(x) = g(x)$ とすると (20) 式が得られます。■

矩形関数のフーリエ変換

矩形関数 $\mathrm{rect}(x)$ は，

$$
\mathrm{rect}(x) = \begin{cases} 0 & |x| > \frac{1}{2} \\ 1 & |x| < \frac{1}{2} \end{cases} \tag{25}
$$

で定義されます。矩形関数のフーリエ変換は

$$
\begin{aligned}
FT[\mathrm{rect}(x)](\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}(x)\exp(-i2\pi\nu x)dx \\
&= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \exp(-i2\pi\nu x)dx \\
&= \frac{1}{-i2\pi\nu}\left[\exp(-i2\pi\nu x)\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{\pi\nu}\cdot\frac{\exp(i\pi\nu) - \exp(-i\pi\nu)}{2i} = \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}
\end{aligned}
\tag{26}
$$

となります。この $\dfrac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}$ を sinc 関数といい，$\mathrm{sinc}(\nu)$ と書きます。同様にして，周波数空間の矩形関数を逆フーリエ変換すると，実空間の sinc 関数となります。

ある関数に矩形関数をかけると，その関数をある区間に制限することができます。実空間では関数の存在する範囲の制限，周波数空間では帯域の制限となります。

参考文献

1. H. P. Hsu（佐藤平八訳），フーリエ解析，森北出版， ISBN4- 627-93010-0
2. 伊東一良編，原理がわかる・現場で使える 信号処理，丸善，ISBN978-4-621-08210-2
3. 千葉逸人，これならわかる 工学部で学ぶ数学，プレアデス出版，ISBN4-7687-0882-X

なお，各参考書では周波数 ν のかわりに角周波数 $\omega = 2\pi\nu$ を使って説明されていることも多く，その場合係数等が違っていることに注意してください。また，フーリエ変換と逆フーリエ変換につく係数も表現のしかたによって違っています。