2011 年度秋学期　解析応用　第８回

第２部・集合と確率／ 可測空間と確率

現代の確率論においては，事象を集合として考え，確率を「集合に『確率という測度』を割り当てるやりかた」ととらえています。今日はまず，確率を割り当てることのできる集合とは何かを考え，確率の概念の基本を述べます。

事象と集合，可測空間

前回の「ラプラスの確率の定義」では，さいころを例にとり，「さいころの 1,2, ...,6 の目が出る確率はどれも等しい」と考えて，それぞれの確率を 1/6 と定義しました。

この例の場合は，「さいころをふる」というランダム現象の結果は $\{1,2,3,4,5,6\}$ の 6 通りでした。このように「すべての可能な結果」の集合を**標本空間**といいます。さいころの例では，標本空間は有限集合ですから，その要素である 1, 2, 3, 4, 5, 6 にそれぞれ確率 1/6 を割り当てました。

しかし，標本空間が「連続的に動く時計の針を目を閉じて止めたときの、止まった位置と 0 時の位置との間の角度」となると，標本空間はある区間の実数の集合となります。その要素はもちろん有限個ではなく，それどころか可算でもありません。つまり，ひとつひとつの要素を数えあげることができませんから，それらに確率を割り当てることはできません[1]。

そこで，標本空間の要素ではなく，標本空間の部分集合に確率を割り当てることにします。さいころの例でいえば，「1 または 2 の目（が出る）」は部分集合です。時計の針の例でいえば，「1 時から 3 時の間の角度（に止まる）」は部分集合です。ここでは，これらの部分集合を**事象**といいます。

このとき，標本空間 Ω に対して，確率を割り当てることのできる部分集合の集合（集合族）$\mathscr{F}$ は，以下の条件を満たすものに制限することとします。

1. $\Omega \in \mathscr{F}$
2. $A \in \mathscr{F} \Rightarrow A^c \in \mathscr{F}$
3. $A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{F}$

この条件を満たす $\mathscr{F}$ を，Ω 上の $\boldsymbol{\sigma}-$ **集合体**といいます。条件 1 は，標本空間全体，すなわち**全事象**には必ず確率を割り当てることを示しています。条件 2 は，ある事象 A に確率を割り当てるのならば，その補集合 A^c，すなわち**余事象**にも必ず確率を割り当てることを示しています。条件 3. は，事象 $A_1, A_2, \ldots$ に確率を割り当てるならば，その和集合，すなわち**和事象**にも必ず確率を割り当てることを示しています。

Ω の部分集合全体，すなわち Ω の**べき集合** $\mathfrak{P}(\Omega)$ は，明らかに Ω 上の $\sigma-$ 集合体です。しかし，Ω 上の $\sigma-$ 集合体はこれだけではなく，例えば $\{\emptyset, \Omega\}$ も Ω 上の $\sigma-$ 集合体です。

標本空間 Ω とその上の $\sigma-$ 集合体 $\mathscr{F}$ の組を**可測空間** $(\Omega, \mathscr{F})$ といいます。

[1] このあたりのことは，１年生向けの統計学の講義では「連続型確率分布の矛盾」として紹介しています。詳しくは，私の講義「統計学」第７回の付録「離散と連続の間」を参照してください。

確率測度

確率は，可測空間を測る測度として定義されます。$\sigma-$ 集合体 $\mathscr{F}$ の要素（つまり事象）の関数 P で，次の条件を満たすものを**確率測度**といいます。

1. すべての $A \in \mathscr{F}$ について，$P(A) \geqq 0$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $A_i \in \mathscr{F}$ かつ $A_i \cap A_j = \emptyset\ (i \neq j) \Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

条件 1 は，確率が正の数または 0 であることをいっています。条件 2 は，全事象の確率が 1，すなわち「$\mathscr{F}$ のうちの何かの事象がおきる確率は 1」といっています。条件 3 は，共通部分のない各集合（**排反**な各事象）に対する確率の合計は，それらの和集合（和事象）に対する確率である，といっています。これは**完全加法性**とよばれ，測度がもつべき本質的な性質です。「共通部分のない各集合」は，可算無限個あってもかまいません[2]。可測空間 $(\Omega, \mathscr{F})$ とそれに対する確率測度 P をあわせた $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を**確率空間**といいます。

例えば，コインを 1 回投げるという試行を考え，表が出るという事象を H，裏が出るという事象を T とすると，標本空間 $\Omega = \{H, T\}$ です。Ω に対して集合族 $\mathscr{F} = \{\emptyset, \{H\}, \{T\}, \Omega\}$ を考えると，$\mathscr{F}$ は $\sigma-$ 集合体です。このとき，関数 P を $P(\emptyset) = 0, P(\{H\}) = p, P(\{T\}) = 1 - p, P(\Omega) = 1\ (0 \leqq p \leqq 1)$ とすると，関数 P は確率測度の条件を満たしており，$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ は確率空間となります。常識的なラプラスの定義では，「正しいコイン」なら $p = 1/2$ と考えていることになります。

このとき，標本空間 Ω に対して集合族 $\mathscr{F} = \{\emptyset, \Omega\}$ としても，$\mathscr{F}$ は $\sigma-$ 集合体です。このとき，関数 P を $P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1$ とすると，やはり関数 P は確率測度の条件を満たしており，$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ は確率空間となります。確率空間の作り方は一通りではありません。

離散型確率空間

標本空間 Ω が，有限集合または可算無限集合，つまり「要素を数えられる集合」である場合を考えます。$\Omega = \omega_1, \omega_2, \ldots$ とするとき，$\mathscr{F}$ を Ω のべき集合 $\mathfrak{P}(\Omega)$ として，p_i をすべての i について $p_i \geqq 0$ で，$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$ である数とするとき，$A \in \mathscr{F}$ について

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i \tag{1}$$

とすれば，P は確率測度で，$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ は確率空間となります。

この確率空間を**離散型確率空間**といいます。要するに，標本空間が離散的である場合には，標本空間の部分集合としての事象を考えなくても，標本空間の各要素 ω_i に直接確率 $P(\omega_i) = p_i$ を割り当ててよい，ということを示しています。この $P(\omega_i)$ を**確率関数**とよびます。

ボレル集合体と実数に対する確率の定義

さて，今度は Ω として実数全体（集合 R）を考えてみます。実数全体を標本空間とする場合，「部分集合」は「区間」に相当します。そこで，$\sigma-$ 集合体も区間について考えてみることにします。

[2] 可算無限個ではなく有限個の場合は「有限加法性」といいます。この場合は，よく知られた確率の和の法則となります。有限加法性から完全加法性への飛躍が，現代の測度論のはじまりとなりました。

このとき，「すべての半開区間 $(a,b]$ を含む最小の $\sigma-$ 集合体」を $\mathscr{B}$ で表し，**ボレル集合体**といいます[3]。

さらに，実数 x に対して，以下の条件を満たす関数 $F(x)$ を考えます。

1. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$
2. すべての x, y について，$x < y \Rightarrow F(x) \leqq F(y)$ かつ $F(x+0) = F(x)$（脚注[4]を参照）
3. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$

この関数 F を使って，互いに排反な半開区間 $(a_i, b_i]$ $(i = 1, 2, \dots)$ に対して関数 P_0 を

$$P_0\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i]\right) = \sum_{i=1}^{\infty}\left(F(b_i) - F(a_i)\right) \tag{2}$$

と定義します。

この関数 P_0 は，「すべての半開区間 $(a,b]$ を含む最小の $\sigma-$ 集合体」であるボレル集合体 $\mathscr{B}$ の上での確率測度になっているでしょうか。ここで，ボレル集合体 $\mathscr{B}$ のかわりに，すべての「有限個の半開区間の集合」からなる集合族 $\mathscr{F}_0$ を考えます。$\mathscr{F}_0$ については，$\sigma-$ 集合体の条件 1.〜3. は，3. を有限個の和集合におきかえればなりたちます。このような $\mathscr{F}_0$ を**集合体**といいます。

一方，関数 P_0 が $(R, \mathscr{F}_0)$ での確率測度である条件は

1. 関数 F は単調非減少なので，$\mathscr{F}_0$ に属する区間の集合 A のいずれについても $P_0(A) \geqq 0$.
2. 互いに排反な半開区間を $(a,b], (b,c], \dots$ のようにつないでいって実数全体の集合 R を構成すると考えると，関数 F の定義の 1. と 3. により $P_0(R) = 1$.
3. 上の関数 P_0 の定義そのまま.

で満たされています。これを，「測度空間 $(R, \mathscr{F}_0, P_0)$ が**可算加法的**である」といいます。

このとき，測度論における「拡張定理」を用いると，$(R, \mathscr{F}_0, P_0)$ が可算加法的で，関数 P_0 が有界ならば，$\mathscr{F}_0$ を $\mathscr{B}$ に拡張でき，$\mathscr{F}_0$ に属するすべての集合 A について $P(A) = P_0(A)$ となる確率測度 P がただ一つ存在する，ということがいえます。

このことは，実数の区間に対して，関数 F で確率を定めてよい，ということを示しています。「$\mathscr{F}_0$ に属するすべての集合 A について $P(A) = P_0(A)$」ですから，$P((a,b]) = F(b) - F(a)$ で，関数 F の性質から $P((-\infty, x]) = F(x)$ です。この関数 F を**分布関数（累積分布関数）**といいます。また，分布関数 F について，すべての実数 x に対して

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \tag{3}$$

を満たす関数 f が存在するとき，f を**密度関数**といいます。関数 F が微分可能なら，$F'(x) = f(x)$ という関係になります。図 1 は，分布関数と密度関数の関係を表しています。

[3]ボレル集合体は，本来はもっと一般的な概念である位相空間と開部分集合に対して定義されるものですが，ここでは実数と半開区間についてのみ考えます。

[4]$F(x)$ は x で右連続である，といいます。

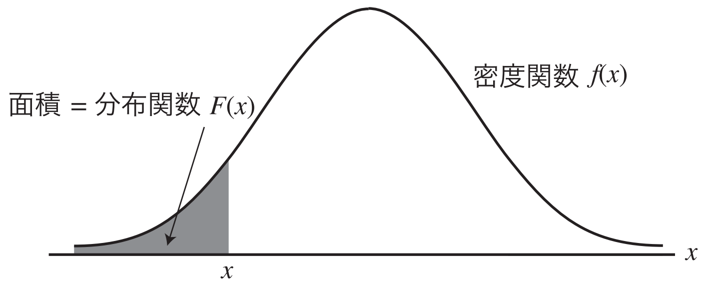

図 1: 密度関数と分布関数

問題

確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ について，集合 $A, B \in \mathscr{F}$ のとき，下記を証明してください。

1. $P(\emptyset) = 0$
2. $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
3. $P(A^c) = 1 - P(A)$
4. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leqq P(B)$
5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

参考文献

確率に関しては，下記の４冊の書籍を参考にして講義を構成しています。

佐藤坦，はじめての確率論　測度から確率へ，共立出版，ISBN978-4320-014732, 1994.
柳川尭，統計数学，近代科学社，ISBN978-4764-910140, 1990.
宮沢政清，確率と確率過程，近代科学社，ISBN978-4764-910348, 1993.
志賀浩二，ルベーグ積分３０講，朝倉書店，ISBN978-4254-114843, 1990.