

## 2011 年度秋学期 解析応用 第9回演習の解答例

$X$  が確率変数である, すなわち任意の  $a$  について

$$\{\omega | X(\omega) \leq a\} \in \mathcal{F} \quad (\text{A1})$$

であるならば, ヒントのとおり

$$\{\omega | X(\omega) < a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \omega | X(\omega) \leq a - \frac{1}{n} \right\} \quad (\text{A2})$$

なので,  $\mathcal{F}$  が  $\sigma$ -集合族であることの定義の3, すなわち  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$  より, 任意の  $a$  について  $\{\omega | X(\omega) < a\} \in \mathcal{F}$  です。

逆もほぼ同様で, 任意の  $a$  について  $\{\omega | X(\omega) \leq a\} \in \mathcal{F}$  とすると,  $\{\omega | X(\omega) \leq a + \frac{1}{n}\} \in \mathcal{F}$  もなりたちます。さらに,

$$\{\omega | X(\omega) \leq a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \omega | X(\omega) < a + \frac{1}{n} \right\} \quad (\text{A3})$$

がなりたちますから,  $\{\omega | X(\omega) \leq a\} \in \mathcal{F}$  であり, これは  $X$  が確率変数であることを示しています。■