

2011 年度秋学期 解析応用 第 1 2 回演習の解答例

(1) 成功する確率 p , 失敗する確率 $1 - p$ ですから, $p^{x_i}(1 - p)^{1-x_i}$ と表されます。

(2) i 回目の試行で結果が x_i である確率が (1) で表され, 各々の試行は独立なので, 求める確率を $L(p)$ とすると

$$L(p) = \prod_{i=1}^n p^{x_i}(1 - p)^{1-x_i} \quad (\text{A1})$$

となります。

(3) $p \neq 0, p \neq 1$ より

$$\log L(p) = \sum_{i=1}^n (x_i \log p + (1 - x_i) \log(1 - p)) \quad (\text{A2})$$

となるので,

$$\frac{d}{dp} \log L(p) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - p}{p(1 - p)} \right) \quad (\text{A3})$$

となります。これを 0 とする p の値を \hat{p} とすると,

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \hat{p}) = 0 \quad (\text{A4})$$

となり,

$$\hat{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (\text{A5})$$

が得られます。

$\sum_{i=1}^n x_i$ とは, つまるところ, n 回の試行中の成功回数です。したがって, $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ は「成功の割合」で, 成功確率の推定量としては, ごく自然なものといえます。

(注) (2) 以下は次のようにしてもかまいません。

(2) (続き) $y = \sum_{i=1}^n x_i$ とおくと,

$$L(p) = p^y(1 - p)^{n-y} \quad (\text{A6})$$

となります。(3) もほぼ同様です。