

2011 年度秋学期 解析応用 第 13 回演習の解答例

1. $f_X(x), f_Y(y)$ をそれぞれ X, Y の周辺確率密度関数, $f_{XY}(x, y)$ を X, Y の同時確率密度関数とすると, X, Y は独立ですから, $f_{XY}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$ です。よって

$$\begin{aligned} E(XY) &= \iint_{x,y} xyf_{XY}(x, y)dxdy \\ &= \iint_{x,y} xyf_X(x)f_Y(y)dxdy \\ &= \int_x xf_X(x)dx \int_y yf_Y(y)dy \\ &= \int_x xf_X(x)dx \int_y yf_Y(y)dy \\ &= E(X)E(Y) \end{aligned} \tag{A1}$$

なお, $\iint_{x,y}$ は x, y の両方について $-\infty$ から ∞ まで積分すること, $\int_x (\int_y)$ は x (y) について $-\infty$ から ∞ まで積分することを意味します。

2. 以下のとおりです。

$$\begin{aligned} M_{X+Y}(t) &= E[e^{t(X+Y)}] = E[e^{tX}e^{tY}] = \iint_{x,y} e^{tx}e^{ty}f_{XY}(x, y)dxdy \\ &= \iint_{x,y} e^{tx}e^{ty}f_X(x)f_Y(y)dxdy \\ &= \int_x e^{tx}f_X(x)dx \int_y e^{ty}f_Y(y)dy \\ &= E[e^{tX}]E[e^{tY}] = M_X(t)M_Y(t) \end{aligned} \tag{A2}$$