2011 年度秋学期　解析応用　第１５回
χ^2 分布と t 分布

前回の講義で，正規分布を例にとって検定の原理を説明しました。このとき，母平均に関する区間推定・検定を行う際に，母分散が既知であるとの前提で議論を進めました。

しかし，母平均が不明なときに母分散が既知であるというのは，到底考えにくいことです。そこで，標本を用いて求められる不偏分散（第１２回で説明した）を，母分散のかわりに用いた場合に，推定や検定がどのように行えるかを説明します。ここで出てくる確率分布モデルが χ^2 分布と t 分布です。

χ^2 分布

確率変数 $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ が互いに独立で，それぞれが標準正規分布 $N(0,1)$ にしたがうとします。このとき，

$$\chi^2 = Z_1^2 + Z_2^2 + \cdots + Z_n^2 \tag{1}$$

がしたがう確率分布を**自由度 n の χ^2（カイ２乗）分布**といい，記号 $\chi^2(n)$ で表します[1]。

不偏分散と χ^2 分布の間には，次のような関係があります。

> 母平均 μ, 母分散 σ^2 の正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$ にしたがう母集団から, n 個からなる標本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ をとる。その標本平均を $\bar{X}$ とし，不偏分散を s^2 とするとき，$(n-1)s^2/\sigma^2$ は自由度 $n-1$ の χ^2 分布 $\chi^2(n-1)$ にしたがう。

その証明は付録１，２に収録しています。ここでは標本サイズが 2 の場合について上のことを確かめてみましょう。$n=2$ ですから，不偏分散 s^2 は

$$s^2 = \frac{1}{2-1}\left\{(X_1-\bar{X})^2 + (X_2-\bar{X})^2\right\} \tag{2}$$

となります。$\bar{X} = (X_1+X_2)/2$ ですから，$X_1-\bar{X}$ と $X_2-\bar{X}$ は独立ではありません。したがって，このまま χ^2 分布の定義を使うことはできません。そこで $\bar{X} = (X_1+X_2)/2$ という関係を使ってこの式を変形すると，

$$\begin{aligned}
s^2 &= (X_1-\bar{X})^2 + (X_2-\bar{X})^2 \\
&= \left(X_1 - \frac{X_1+X_2}{2}\right)^2 + \left(X_2 - \frac{X_1+X_2}{2}\right)^2 \\
&= \left(\frac{X_1-X_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{X_2-X_1}{2}\right)^2 \\
&= \frac{(X_1-X_2)^2}{2}
\end{aligned} \tag{3}$$

となります。ここで $X_1 - X_2 = Y$ とおくと，$s^2 = Y^2/2$ となります。X_1, X_2 は独立で $N(\mu,\sigma^2)$ にしたがいますから，$Y = X_1 - X_2$ は平均 0，分散 $2\sigma^2$ の正規分布 $N(0, 2\sigma^2)$ にしたがいます。ですから，

[1] 詳細は付録 1 を見てください。

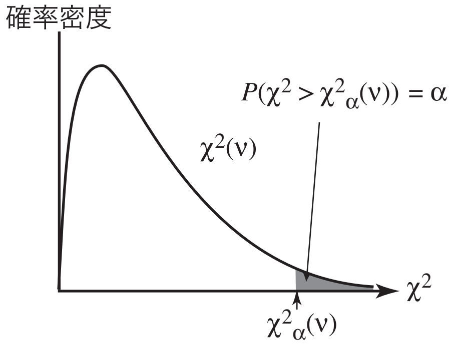

図 1: 自由度 ν の χ^2 分布の上側確率 $100\alpha\%$ のパーセント点 $\chi^2_\alpha(\nu)$

$Y/\sqrt{2}\sigma$ は標準正規分布 $N(0,1)$ にしたがいます。そこで，

$$s^2 = \frac{Y^2}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{Y}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2 \cdot 2\sigma^2 = \left(\frac{Y}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2 \cdot \sigma^2 \tag{4}$$

すなわち

$$(2-1)\frac{s^2}{\sigma^2} = \left(\frac{Y}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2 \tag{5}$$

と変形すると，χ^2 分布の定義から $(2-1)s^2/\sigma^2$ が自由度 1 の χ^2 分布にしたがうことがわかります。もともと 2 つの独立な変数 X_1, X_2 があったのが，不偏分散を求めると独立な変数が Y ただ 1 つになっていることに注意してください。

自由度 ν の χ^2 分布 $\chi^2(\nu)$ にしたがう確率変数 χ^2 がある範囲の値をとる確率を知るには，数表を利用することができます。χ^2 の数表では，各自由度 ν（縦軸）と定数 α（横軸）に対して，$P(\chi^2 > x) = \alpha$ となるような x が縦 ν・横 α の交点の値を読むことで求められます。この x を**自由度 ν の χ^2 分布の上側確率 $100\alpha\%$ のパーセント点**といい $\chi^2_\alpha(\nu)$ で表します。

ここで，下記の問題を考えてみましょう。

> ある正規母集団は，母分散 $\sigma^2 = 15$ であるという。この母集団からサイズ $n = 10$ の標本をとったとき，「不偏分散 s^2 が a を超える確率が 0.05」であるような a の値を求めよ。

$P(s^2 > a) = 0.05$ となる a を求めます。$s^2 > a$ のとき $(n-1)s^2/\sigma^2 > (n-1)a/\sigma^2$ です。問題の条件は $\sigma^2 = 15$ で自由度 $n-1 = 9$ ですから，$(n-1)a/\sigma^2 = 9a/15 = 0.6a$ です。よって，求める a は $P((n-1)s^2/\sigma^2 > 0.6a) = 0.05$ となる a です。$(n-1)s^2/\sigma^2$ は自由度 $n-1$ の χ^2 分布にしたがうので，$P((n-1)s^2/\sigma^2 > 0.6a) = 0.05$ となる $0.6a$ は上側確率 5% のパーセント点 $\chi^2_{0.05}(9)$ で，数表から $0.6a = 16.9190$，よって $a = 28.1983$ となります。母分散が 15 であっても，不偏分散が 28 を超える確率が 5% ほどあることになります。

---

t 分布

２つの互いに独立な確率変数 Y, Z があり，Y が自由度 k の χ^2 分布 $\chi^2(k)$ にしたがい，さらに Z が標準正規分布 $N(0,1)$ にしたがうとします。このとき，

$$\frac{Z}{\sqrt{\frac{Y}{k}}} \tag{6}$$

がしたがう確率分布を**自由度 k の t 分布**（スチューデントの t 分布）といい，$t(k)$ で表します。

この確率分布がどういう場合に現れるかを見てみましょう。母平均 μ，母分散 σ^2 の正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ にしたがう母集団から，n 個からなる標本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ をとります。そして，その標本平均を $\bar{X}$ とします。$\bar{X}$ は正規分布 $N(\mu, \sigma^2/n)$ にしたがうので，

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \tag{7}$$

は標準正規分布 $N(0,1)$ にしたがいます。これを用いて母平均 μ についての推定や検定ができればよいのですが，それには母分散 σ^2 がわかっていなければなりません。しかし，母平均が未知なのに母分散がわかっているというのは，普通は考えにくいことです。そこで，母分散 σ^2 を不偏分散 s^2 で代用した

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} \tag{8}$$

を考えます。これを t 統計量といいます。σ^2 が s^2 に変わっただけですが，この t 統計量がしたがう分布は $N(0,1)$ ではありません。この式を次のように変形してみます。

$$t = \frac{\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}\right)}{\left(\frac{\sqrt{\frac{s^2}{n}}}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}\right)} = \frac{\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}\right)}{\sqrt{\frac{s^2}{\sigma^2}}} = \frac{\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}\right)}{\sqrt{\frac{(n-1)\frac{s^2}{\sigma^2}}{n-1}}} \tag{9}$$

ここで (9) 式の分子は (7) 式の Z と同じで，この Z は標準正規分布 $N(0,1)$ にしたがいます。また，分子の根号の中について

$$Y' = (n-1)\frac{s^2}{\sigma^2} \tag{10}$$

とおくと，付録２で説明しているように，Y' は自由度 $n-1$ の χ^2 分布すなわち $\chi^2(n-1)$ にしたがいます。このとき (9) 式は

$$t = \frac{Z}{\sqrt{\frac{Y'}{n-1}}} \tag{11}$$

となります。やはり付録２で述べているように，$\bar{X}$ と s^2 が独立であることがいえる（証明は略）ので，Z と Y' は独立です。よって，(8) 式の t 分布の定義とくらべると，t 統計量は自由度 $(n-1)$ の t 分布 $t(n-1)$ にしたがうことがわかります。

t 統計量は，母分散 σ^2 を使って標準化された，標準正規分布にしたがう統計量の，σ^2 を不偏分散 s^2 に置き換えたものです。したがって，t 統計量がしたがう t 分布の確率密度関数は，標準正規分布によく似た左右対称の形になっています。とくに，標本サイズ n が大きいときは，標本も母集団もほとんど同じになるので，t 分布も標準正規分布とほとんど同じになります。

t 分布と区間推定

t 分布を用いると，母分散が不明の場合でも，標準正規分布の場合と同様に母平均の信頼区間を求めることができます。次の問題を考えてみましょう。

> ある試験の点数の分布は正規分布であるとします。この試験の受験者から 10 人の標本を無作為抽出して，この 10 人の点数を平均したところ 50 点で，またこの 10 人の点数の不偏分散が 5^2 でした。このとき，受験者全体の平均点の 95%信頼区間を求めてください。

自由度 $n-1$ の t 分布において，$t_{0.025}(n-1)$ を「t 統計量がその値以上になる確率が 0.025 であるような値」(「2.5 パーセント点」といいます）とし，$-t_{0.025}(n-1)$ を「t 統計量がその値以下になる確率が 0.025 であるような値」とすると

$$P\left(-t_{0.025}(n-1) \leq \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{s^2/n}} \leq t_{0.025}(n-1)\right) = 0.95 \tag{12}$$

が成り立ちます（図 2)。この式から，

$$P\left(\bar{X} - t_{0.025}(n-1)\sqrt{\frac{s^2}{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{0.025}(n-1)\sqrt{\frac{s^2}{n}}\right) = 0.95 \tag{13}$$

となりますから，μ の 95%信頼区間は (13) 式のかっこ内の範囲となります。

$t_\alpha(\nu)$，すなわち自由度 ν の 100α パーセント点の値を知るには，数表を利用することができます。数表では，各自由度 ν（縦軸）と定数 α（横軸）に対して，$t_\alpha(\nu)$ が縦 ν・横 α の交点の値を読むことで求められます。この問題の場合，標本平均 $\bar{X}=50$，不偏分散 $s^2=25$ で，数表から $t_{0.025}(10-1)=2.262$ ですから，μ の 95%信頼区間は「46.4（点）以上 53.6（点）以下」となります。

前回の例のように，母分散が 25 とわかっているときには，μ の 95%信頼区間は「46.9（点）以上 53.1（点）以下」でしたから，今回の場合の方が信頼区間が広くなっています。信頼区間が広いということは，推定が不確かであることを意味しています。これは，不偏分散は母分散そのものではなく，母分散を推定した値であるため，不偏分散にはすでに不確かさが入っているためです。

---

t 分布と検定

同じ考えで，母平均に関して検定を行なう問題を考えてみましょう。

> ある試験の点数の分布は正規分布であるとします。この受験者全体から無作為抽出された 10 人の標本の点数の平均は 50 点で，不偏分散は 5^2 でした。このとき，「受験者全体の平均点は 53 点よりも小さい」といえるか，有意水準 5%で検定してください。

問題から，帰無仮説 $\mathrm{H}_0 : \mu = 53$, 対立仮説 $\mathrm{H}_1 : \mu < 53$ の検定を行います。母平均を μ，標本平均を $\bar{X}$，不偏分散を s^2，標本サイズを n とするとき，上で述べたとおり，

$$t = \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{s^2/n}} \tag{14}$$

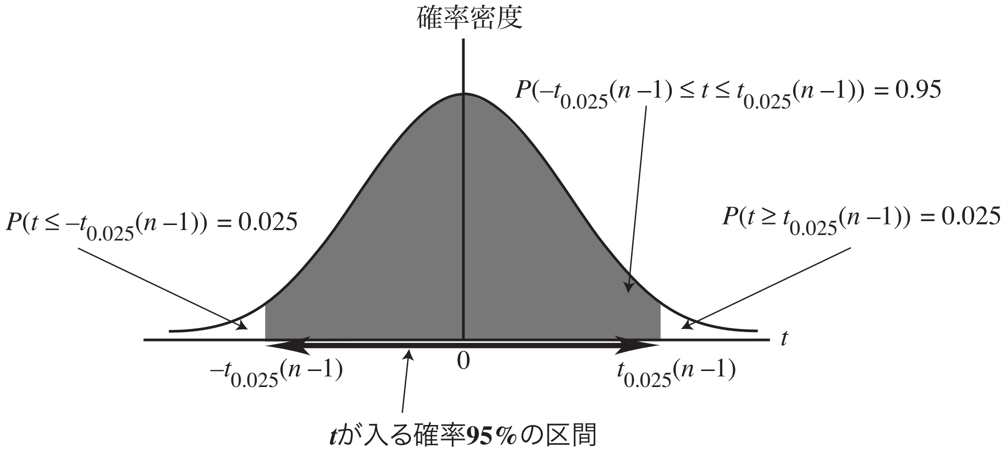

図 2: t 分布と区間推定

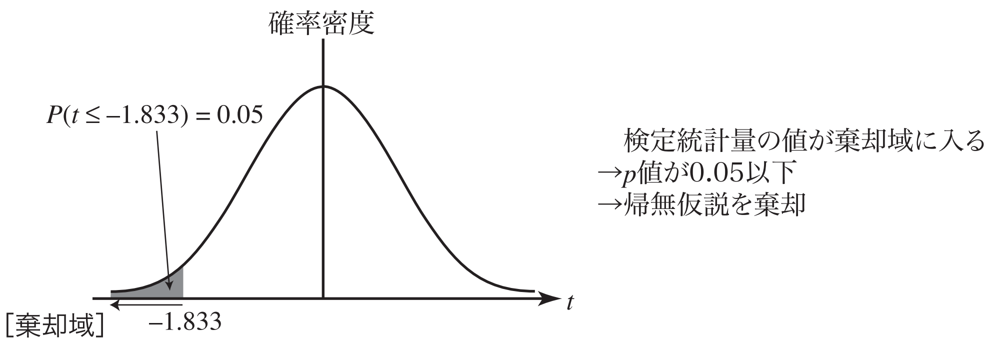

図 3: t 分布と検定

という値は，自由度 $n-1$ の t 分布にしたがいます。

「対立仮説 $\mathrm{H}_1 : \mu < 53$」というのは，「帰無仮説が棄却されたとすると，そのときは $\mu < 53$ という対立仮説を採択する」という意味です。つまり，「帰無仮説が棄却されたとすると，それは『μ は 53 では大きすぎる』からだ」という推論をしたいわけです。μ が大きくなると，(14) 式の t は小さくなります。ですから，「t が小さすぎるとき」帰無仮説が棄却されるように，棄却域を設定します。t 分布の数表から，自由度 $n-1=9$ のとき，(14) 式の t が $-t_{0.05}(9) = -1.833$ 以下である確率すなわち $P(t \leq -1.833)$ が 5%であることがわかります。ですから，問題文の数値を入れて (14) 式の t を計算し，その値が -1.833 以下であれば帰無仮説を棄却します。

問題文の $s^2 = 25$，$\bar{X} = 50$，$n = 10$，それに $\mu = 53$ を (14) 式に代入すると $t = -1.897$ ですから，この t は棄却域に入っています。したがって，帰無仮説を棄却して対立仮説を採択し，「受験者全体の平均点は 53 点よりも小さい」と結論します。

今日の演習

1. ある実験で，水の沸点を 9 回測定して，「100.0　100.1　101.0　99.3　97.8　100.2　98.5　100.1　101.0」(℃) という値を得ました。物質の沸点の測定結果が，真の沸点を平均とする正規分布にしたがうとするとき，真の沸点を信頼係数 95%で区間推定してください。
2. この実験結果から，「この水の沸点は 100 ℃より低い」といえるどうかを，有意水準 5%で検定してください。

付録１：χ^2 分布の定義と正規分布との関係

χ^2 分布はガンマ分布という確率分布の 1 種で，その確率密度関数は次の式で表されます。

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\nu/2-1}e^{-x/2}}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)} & (x \geq 0) \\ = 0 & (x < 0) \end{cases} \tag{A1}$$

パラメータ ν を自由度とよびます。また，$\Gamma()$ はガンマ関数という関数で，次のように定義されます。

$$\Gamma(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx \tag{A2}$$

この確率密度関数から，モーメント母関数を求めてみましょう。モーメント母関数の定義により

$$\begin{aligned} M_X(t) = E(e^{tX}) &= \frac{1}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)}\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}x^{\nu/2-1}e^{-x/2}dx \\ &= \frac{1}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)}\int_{-\infty}^{\infty} x^{\nu/2-1}e^{-\frac{x(1-2t)}{2}}dx \end{aligned} \tag{A3}$$

となります。ここで，$z = x(1-2t)/2$ という変数変換を行うと，$dx = 2dz/(1-2t)$ ですから

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \frac{1}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)}\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{2z}{1-2t}\right)^{\nu/2-1} e^{-z}\frac{2}{1-2t}dz \\ &= \frac{\left(\frac{2}{1-2t}\right)^{\nu/2}}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)}\int_{-\infty}^{\infty} z^{\nu/2-1}e^{-z}dz \end{aligned} \tag{A4}$$

となり，この式の積分は (A2) 式より $\Gamma(\nu/2)$ ですから，

$$M_X(t) = \frac{\left(\frac{2}{1-2t}\right)^{\nu/2}}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)}\Gamma(\nu/2) = (1-2t)^{-\nu/2} \tag{A5}$$

となります。

さて，確率変数 $Z_1, Z_2, \ldots, Z_k$ が互いに独立で，それぞれが標準正規分布 $N(0,1)$ にしたがうとします。このとき，これらの確率変数の 2 乗の和 $V = Z_1^2 + Z_2^2 + \cdots + Z_k^2$ がしたがう分布を考えてみます。独立な確率変数の和のモーメント母関数は，それぞれのモーメント母関数の積になるので，

$$M_V(t) = M_{Z_1^2+Z_2^2+\cdots+Z_k^2}(t) = M_{Z_1^2}(t)\cdot M_{Z_2^2}(t)\cdot\cdots\cdot M_{Z_k^2}(t) = \left\{M_{Z_1^2}(t)\right\}^k \tag{A6}$$

となります。Z_1 は $N(0,1)$ にしたがうので，

$$\begin{aligned} M_{Z_1^2}(t) = E[e^{tZ_1^2}] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tz^2} \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2(1-2t)/2} dz \end{aligned} \tag{A7}$$

となり，ここで $y = z\sqrt{1-2t}$ という変数変換を行うと，$dz = dy/\sqrt{1-2t}$ ですから

$$\begin{aligned} M_{Z_1^2}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2(1-2t)/2(1-3t)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-2t}} dy \\ &= (1-2t)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy \end{aligned} \tag{A8}$$

となりますが，下段の積分の中は標準正規分布の密度関数ですから積分の値は 1 です。よって

$$M_V(t) = \left\{ M_{Z_1^2}(t) \right\}^k = (1-2t)^{-k/2} \tag{A9}$$

です。これは，(A5) 式で示した通り，自由度 k の χ^2 分布のモーメント母関数です。つまり，標準正規分布 $N(0,1)$ にしたがう独立な確率変数 k 個の 2 乗の和 $V = Z_1^2 + Z_2^2 + \cdots + Z_k^2$ は自由度 k の χ^2 分布にしたがいます。

付録２：不偏分散と χ^2 分布との関係

母平均 μ，母分散 σ^2 の正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ にしたがう母集団から，n 個からなる標本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ をとります。その標本平均を X とし，標本分散（不偏分散）σ^2 を

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \left\{ (X_1 - \bar{X})^2 + (X_2 - \bar{X})^2 + \cdots + (X_n - \bar{X})^2 \right\} \tag{A10}$$

とします。このとき，つぎの関係がわかります。

$$\begin{aligned} (n-1)s^2 &= \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left[(x_i - \mu) - (\bar{X} - \mu) \right]^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 - 2(\bar{X} - \mu) \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu) + \sum_{i=1}^{n} (\bar{X} - \mu)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 - 2(\bar{X} - \mu) \cdot n(\bar{X} - \mu) + n(\bar{X} - \mu)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 - n(\bar{X} - \mu)^2 \end{aligned} \tag{A11}$$

上の式の両辺を σ^2 で割ると

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} + \left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2 \tag{A12}$$

が得られます。この関係を $J+K^2=L$ と表します。ここで,「X_i が独立で正規分布にしたがうとき,s^2 と $\bar{X}$ は独立である」[2]ことを用いると,J と K^2 は独立となりますから

$$\begin{aligned} M_{J+K^2}(t) &= M_L(t) \\ M_J(t)M_{K^2}(t) &= M_L(t) \\ \text{ゆえに } M_J(t) &= \frac{M_L(t)}{M_{K^2}(t)} \end{aligned} \tag{A13}$$

が得られます。X_i は $N(\mu,\sigma^2)$ にしたがい,各々は独立なので,L は自由度 n の χ^2 分布にしたがいます。また,X は $N(\mu,\sigma^2/n)$ にしたがいますから,K は $N(0,1)$ にしたがいます。よって,K^2 は自由度 1 の χ^2 分布にしたがいます。以上のことから,(A9) 式で表される χ^2 分布のモーメント母関数を使って (A13) 式を表すと

$$M_J(t)=\frac{(1-2t)^{-n/2}}{(1-2t)^{-1/2}}=(1-2t)^{-(n-1)/2} \tag{A14}$$

となります。この式は,J が自由度 $n-1$ の χ^2 分布にしたがうことを表しています。つまり,$(n-1)s^2/\sigma^2$ は自由度 $n-1$ の χ^2 分布 $\chi^2(n-1)$ にしたがいます。

[2]この証明は省略します。ホーエル／浅井・村上「入門数理統計学（第４版）」付録６を参照して下さい。