2011年度秋学期　画像情報処理　第１１回

第３部・マセマティカル・モルフォロジ／／ 画像フィルタとフィルタ定理

モルフォロジの第３回は，**フィルタ定理**を説明します。これは，ある広い範囲の全ての画像フィルタが，モルフォロジの演算と論理演算で表現できる，という定理です。ここでは，まずフィルタについて簡単に説明した後，フィルタ定理について説明します。そして，よく知られているフィルタが実際にモルフォロジの演算で表される例を示します。

モルフォロジカル・フィルタ

「フィルタ」とは，一般の用語では「何かを投入するとそれに一定の作用を及ぼして出力する装置」ということができます。例えば，水道水の浄化装置は「有害成分を取り除く」という作用を常時行い，この装置に汚れた水を投入するといつでも有害成分が除かれた水が出力される「フィルタ」です。

画像処理におけるフィルタとは，一般に，画像の各画素について，その画素および近傍の画素とでなんらかの演算を行なって，その結果で各画素を置き換えることで，画像全体のノイズ除去などを行なう操作を指しています。一方モルフォロジにおいては，フィルタとは，広義には画像に対する「移動不変 (translation-invariant)」で「増加的 (increasing)」な操作全体を意味しています。ここで，「集合（画像）X に対する作用 Ψ が移動不変である」とは，

$$\Psi(X_b) = [\Psi(X)]_b \tag{1}$$

であることをいいます。簡単にいえば，「画像中のどこで作用をおよぼしても，その作用の効果は変わらない」という意味です。また，「作用 Ψ が増加的である」とは，

$$X \subset Y \Rightarrow \Psi(X) \subset \Psi(Y) \tag{2}$$

であることをいいます。すなわち，物体の包含関係が作用の前後で保たれることを意味しています。

例えば，ノイズ除去を行う画像フィルタを考えてみましょう。画像中のある場所でノイズとみなされる物体は，画像中のどこにあっても同様に取り除かれなければならないはずですから，フィルタが移動不変であることは自然なことです。また，増加的なフィルタでは「小さな物体を取り除き，大きな物体を保存する」作用のみを記述でき，「大きな物体を取り除き，小さな物体を保存する」という作用は記述できません。しかし，ノイズというのは「ノイズでない，意味のある」物体よりも小さいのが普通です。したがって，増加的なフィルタのみを考えるのは，自然であることがわかります[1].

また，狭義のモルフォロジカルフィルタとは，広義のフィルタの中で「べき等 (idempotent)」なものをさしています。「作用 Ψ がべき等である」とは，

$$\Psi[\Psi(X)] = \Psi(X) \tag{3}$$

であることをいいます。すなわち，「あるフィルタを適用した結果に，そのフィルタを何度くりかえして適用しても，結果は変わらない」という意味です。オープニングやクロージングは，もっとも基本的な（狭義の）モルフォロジカルフィルタです。

[1]差分フィルタは，大きな物体も小さな物体もエッジ以外は取り除いてしまうので，増加的フィルタではありません。

フィルタ定理

フィルタ定理 (filter theorem) とは，モルフォロジの演算と論理演算でたいていのフィルタは表現できること，すなわちモルフォロジが真に図形操作の基礎演算であることを保証するものです。フィルタ定理は，以下のように表されます。

> いかなる移動不変・増加的な（広義の）フィルタも，適当な構造要素を適当な数だけ用いれば，それらによるエロージョンの論理和，およびダイレーションの論理積によって表現されます。すなわち，$\Psi(X)$ を画像 X に対するフィルタとするとき，いかなる $\Psi(X)$ についても
>
> $$\Psi(X) = \bigcup_{B \in \mathrm{Ker}[\Psi]} X \ominus \check{B} \tag{4}$$
>
> $$\Psi(X) = \bigcap_{B \in \mathrm{Ker}[\Psi]} X \oplus \check{B} \tag{5}$$
>
> を満たす構造要素の集合（集合族）Ker[Ψ] が存在します。

Ker[Ψ] はフィルタ Ψ の核 (kernel) とよばれ，次のようなものです。

$$\mathrm{Ker}[\Psi] = \{X \mid 0 \in \Psi(X)\}. \tag{6}$$

0 は X が定義されている座標系の原点を意味します。すなわち，Ker[Ψ] は「考えられるすべての入力図形のうち，それに対するフィルタの出力が原点を含むものすべて」です。

フィルタ定理は，以下のように証明されます。ここでは，式 (4) のほうを証明します[2]。

Ker[Ψ] の要素である任意の構造要素 B について，$X \ominus \check{B}$ に含まれるベクトル（画素）h を考えます。$X \ominus \check{B} = \{x | B_x \subseteq X\}$ と定義されていますから，$B_h \subseteq X$ です。したがって，$B \subseteq X_{-h}$ です。

ここで，フィルタ Ψ は増加的ですから，包含関係 $B \subseteq X_{-h}$ はフィルタ Ψ によって変化しません。すなわち，$0 \in \Psi(B)$ ならば $0 \in \Psi(X_{-h})$ となります。さらに，フィルタ Ψ は移動不変ですから，$0 \in \Psi(X_{-h})$ ならば，この関係を全体に h だけ移動することによって $h \in \Psi(X)$ が得られます。

B は Ker[Ψ] の要素ですから，確かに $0 \in \Psi(B)$ です。以上から，Ker[Ψ] の要素である任意の構造要素 B について，$h \in X \ominus \check{B} \Rightarrow h \in \Psi(X)$ である，つまり，Ker[Ψ] に含まれるどの構造要素 B についても，$X \ominus \check{B}$ に含まれる画素はすべて $\Psi(X)$ に含まれることがわかりました。したがって，$\Psi(X) \supseteq \bigcup_{B \in \mathrm{Ker}[\Psi]} X \ominus \check{B}$ が示されました（図 1)。

逆に，$\Psi(X)$ に含まれる任意の画素 h を考えます。Ψ は移動不変ですから，$h \in \Psi(X)$ ならば $0 \in \Psi(X_{-h})$ です。したがって，$X_{-h} \in \mathrm{Ker}[\Psi]$ です。ところで，$X \ominus \check{X}_{-h} = \{h' \mid (X_{-h})_{h'} \subseteq X\}$ であり，$h' = h$ のとき $\{(X_{-h})_{h'} \subseteq X\}$ は満たされるので，$h \in X \ominus \check{X}_{-h}$ です。ここで X_{-h} を B とおくと，$h \in X \ominus \check{B}$ です。

したがって，Ker[Ψ] に含まれるある構造要素 B について，$h \in \Psi(X) \Rightarrow h \in X \ominus \check{B}$ です。つまり，$\Psi(X)$ に含まれるどの画素についても，Ker[Ψ] の中のある構造要素 B を用いて，その画素が $X \ominus \check{B}$ にも含まれるようにできることがわかりました。したがって，$\Psi(X) \subseteq \bigcup_{B \in \mathrm{Ker}[\Psi]} X \ominus \check{B}$ が示されました (図 2)。

よって以上のことから，$\Psi(X) = \bigcup_{B \in \mathrm{Ker}[\Psi]} X \ominus \check{B}$ が示されました。■

[2] フィルタ定理は，より一般的には「Mathéron の表現定理」とよばれています。より一般的な証明は，参考文献を参照してください。

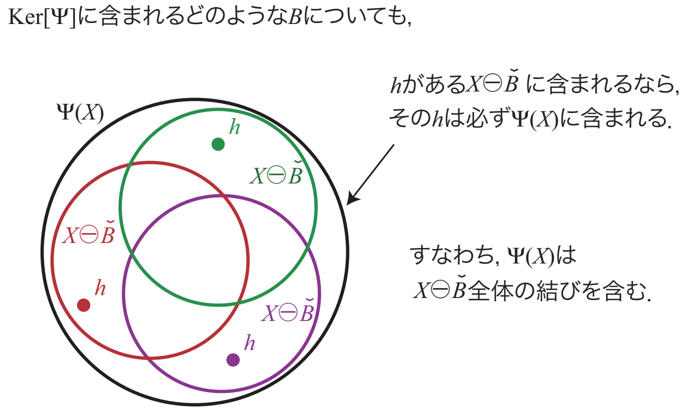

図 1: フィルタ定理の証明（前半）

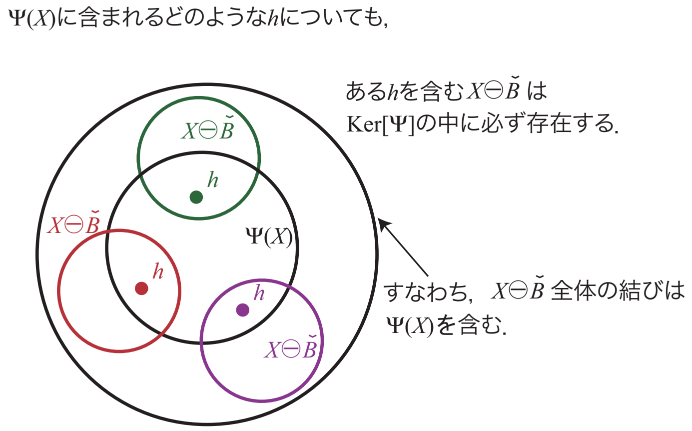

図 2: フィルタ定理の証明（後半）

メジアンフィルタ・平均値フィルタのモルフォロジによる表現

フィルタ定理は，増加的・移動不変なフィルタがモルフォロジの演算と論理演算で表現できることを保証しています。しかし，一般には核は冗長であり，実際の個々のフィルタはもっと少ない個数の構造要素を用いた演算で表現できます。ここでは，メジアンフィルタや平均値フィルタがモルフォロジによってどのように表現できるかを，例を用いて簡単に示します。

これらのフィルタは通常多値画像を対象としているので，前々回で述べたように，エロージョン・ダイレーションは構造要素内でのそれぞれ最小・最大の画素値を選ぶ演算となり，またいくつかの値の論理積・論理和もそれぞれ最小値・最大値に置き換えられます。

メジアンフィルタ

n 画素の大きさのウィンドウをもつメジアンフィルタは，

> ウィンドウ内の画素から $[n/2+1]$ 個からなる画素の組合わせをすべて取り出したとき，各組の最大値の中で最小のもの，あるいは各組の最小値の中で最大のもの

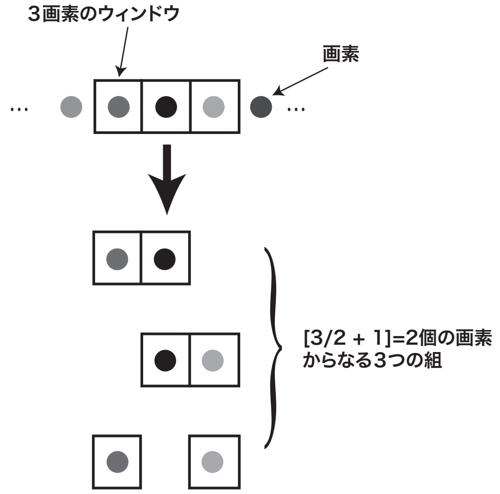

図 3: $[n/2+1]$ 個からなる画素の組

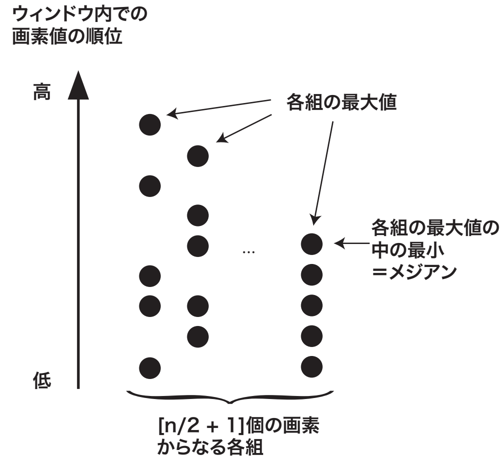

図 4: 最大・最小でメジアンを表す

と表されます。ただし，$[n]$ はガウス記号で，「n を越えない最大の整数」を表します。

「ウィンドウ内の画素から $[n/2+1]$ 個からなる画素の組合わせをすべて取り出す」とは，ウィンドウを各画素に分解して，$[n/2+1]$ 個の画素の組み合わせで作られる小ウィンドウを，可能なものをすべて取り出すことを意味します。このようにして得られた各小ウィンドウ内の画素値について，もとのウィンドウ内での画素値の大きさの順位を表したのが図 4 です。

この例では，９画素からなるウィンドウから，５画素からなるすべての可能な小ウィンドウを取り出しています。縦に１列にならんだ５個の●が，ひとつの小ウィンドウに含まれる画素を表しており，●の高さがもとの９画素のウィンドウ内での画素値の大きさの順位を表しています。

各列の一番上の●は「各組の中での最大値」である．それらの中で最小のものは，図の右端の列のように小ウィンドウ内の画素値の順位が連続している場合に得られ，これはウィンドウ全体のメジアン（ここでは５番目の順位の画素）にあたります。

平均値フィルタ

もっとも簡単な平均値フィルタである「２つの画素値 x，y の平均を求める演算」は，r を実数とするとき

$$\frac{1}{2}[x+y] = \sup_r[\min\{x-r, y+r\}] \tag{7}$$

あるいは

$$\frac{1}{2}[x+y] = \inf_r[\max\{x-r, y+r\}] \tag{8}$$

と，やはり最大・最小値演算で表されます。これを図であらわしたのが図 5 です。

縦軸が画素値を表し，その２か所に x と y があります。横軸はさまざまな r を表し，図では３通りの r について，$x-r$ が矢印（↓）で，$y+r$ が矢印（↑）で表されています。

r がさまざまに変化するとき，「$x-r$ と $y+r$ の大きいほう」を一点鎖線で，両者の小さいほうを二点鎖線で表しています。「大きいほうの最小」と「小さいほうの最大」は，両線が接する位置にあります。この位置では $r=\frac{1}{2}|x-y|$ であるから，「大きいほうの最小」も「小さいほうの最大」も，どちらも x と

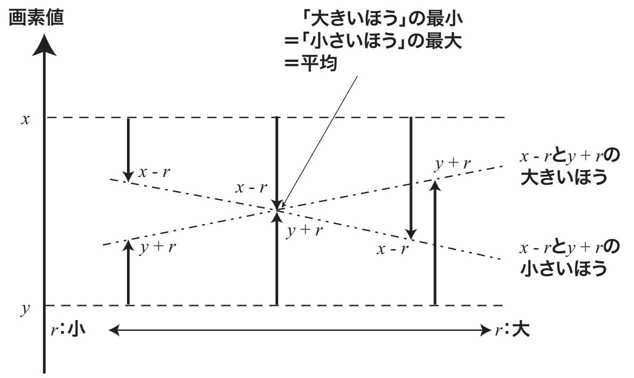

図 5: 最大・最小で平均を表す

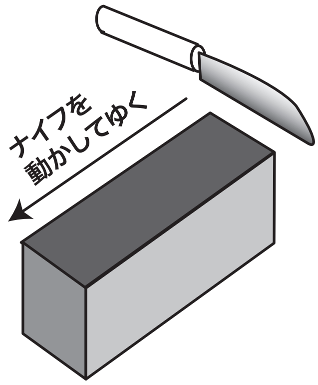

図 6: ケーキを平等に分けるには

y の平均に等しいことがわかります。

このやり方は，クイズ集などにある「ケーキを平等に２等分する方法」と同じです。 これは，棒状のケーキをＡ，Ｂの２人に分けるとき，どちらもより大きい分け前を求めているならば，

1. Ａがナイフをケーキの端から少しずつ動かしてゆく
2. Ｂが途中で「ストップ」の声をかける
3. そこでナイフを入れてケーキを２つに切り，「Ａが」２片のうち好きなほうをとる

とすれば平等に分けられる，というものです。Ａは切断後の２片のうちの大きいほうをとるはずですから，Ｂは「大きいほうが最小」になるように「ストップ」をかけます。その結果，２片は同じ大きさに分けられます。

参考文献

H. J. A. M. Heijmans, *Morphological Image Operators,* Academic Press, London, 1994.