２標本検定

今回は，２つの母集団が同質か異質かを調べる「２標本検定」を調べます。確率の計算にはちょっとむずかしいところがありますので，今日はこの手法の考え方を学んでください。

２標本 t 検定

次のような問題[1]を考えてみましょう。

> 日本人全体から，血液型がA型の人 20 人，B型の人 18 人を無作為抽出して，「奔放さ」を評価する性格テストを行いました。その結果，A型のグループでは得点の平均は 65 で不偏分散は 225，B型のグループでは平均 70 で不偏分散 144 でした。日本人全体について，A型の人とB型の人とではこの性格テストの平均点に差があると言えるか，有意水準 5%で検定してください。ただし，A型の人々・B型の人々それぞれの母集団の性格テストの得点の分布は正規分布になると仮定し，また，それぞれの母集団での母分散は等しいとします。

この問題のように，２つの異なった母集団それぞれから標本をとりだして，２つの母集団の比較を行う問題を，２標本問題といいます。上の問題を一般的に考えると次のようになります。

> 母集団分布が正規分布 $N(\mu_A, \sigma_A^2)$ の母集団A から，n_A 個からなる標本を，
> 母集団分布が正規分布 $N(\mu_B, \sigma_B^2)$ の母集団B から，n_B 個からなる標本を，

それぞれ取り出します。いま，２つの母集団の分散は等しいが未知である，すなわち $\sigma_A^2 = \sigma_B^2 = \sigma^2$ と仮定できるが σ^2 は未知である，とするとき，両母集団の標本平均の差 $\bar{X}_A - \bar{X}_B$ のしたがう分布を考えます。

母集団A から取り出した標本の標本平均 $\bar{X}_A$ がしたがう分布は $N(\mu_A, \sigma_A^2/n_A)$ で，母集団B から取り出した標本の標本平均 $\bar{X}_B$ がしたがう分布は $N(\mu_B, \sigma_B^2/n_B)$ です。このとき $\bar{X}_A$ と $\bar{X}_B$ が独立であれば，$\bar{X}_A - \bar{X}_B$ は $N(\mu_A - \mu_B, (\sigma_A^2/n_A) + (\sigma_B^2/n_B))$ にしたがいます[2]。さらに $\sigma_A^2 = \sigma_B^2 = \sigma^2$ ですから，したがう分布は $N(\mu_A - \mu_B, (1/n_A + 1/n_B)\sigma^2)$ となります。よって，

$$Z = \frac{(\bar{X}_A - \bar{X}_B) - (\mu_A - \mu_B)}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}\right)\sigma^2}} \tag{1}$$

は標準正規分布 $N(0,1)$ にしたがいます。

ここで，σ^2 は未知ですから，標本から計算できる不偏分散で代用する必要があります。この不偏分散は，母集団A，母集団B それぞれからの標本からの不偏分散を混ぜたものになり，この不偏分散を「プー

[1] これは架空のデータで，実際の調査で得られたものではありません。
[2] これを証明するには，多変量確率分布の知識が必要です。教科書 77 ページ，および私の講義（広島大）・2010 年度後期「情報統計学」第１３回を参照してください。

ルされた不偏分散」といいます。s_A^2 と s_B^2 を母集団A，母集団B それぞれからの標本における不偏分散とすると，プールされた不偏分散 s^2 は

$$s^2 = \frac{(n_A - 1)s_A^2 + (n_B - 1)s_B^2}{n_A + n_B - 2} \tag{2}$$

となります（詳しくは付録を見てください）。このとき，(1) 式の σ^2 を (2) 式の s^2 でおきかえた

$$t = \frac{(\bar{X}_A - \bar{X}_B) - (\mu_A - \mu_B)}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}\right) s^2}} \tag{3}$$

を**２標本 t 統計量**といい，これは**自由度** $(n_A + n_B - 2)$ **の** t **分布**にしたがいます。

２標本 t 統計量を用いると，２つの母集団についての母平均の差に関する検定が行えます。ここでは，A 型の人の平均点と B 型の人の平均点が「偶然とは言えないほどの差があるか」が問題なのであって，どちらが大きいかは問題ではありません。したがって，帰無仮説 $H_0 : \mu_A = \mu_B$，対立仮説 $H_1 : \mu_A \neq \mu_B$ の両側検定を行います。

ここで，有意水準を 5% としましょう。２標本 t 統計量は自由度 $(n_A + n_B - 2)$ の t 分布にしたがうので，

$$P\left(-t_{0.025}(n_A + n_B - 2) \leq \frac{(\bar{X}_A - \bar{X}_B) - (\mu_A - \mu_B)}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}\right) s^2}} \leq t_{0.025}(n_A + n_B - 2)\right) = 0.95 \tag{4}$$

となることがわかります。

帰無仮説が正しいとしたとき，$\mu_A = \mu_B$ ですから，$\mu_A - \mu_B = 0$ です。このとき，t 統計量は

$$\frac{\bar{X}_A - \bar{X}_B}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}\right) s^2}} \tag{5}$$

となります。(4) 式の通り，t 統計量は「$-t_{0.025}(n_A+n_B-2)$ 以上，$t_{0.025}(n_A+n_B-2)$ 以下」の範囲に入っている確率が 95%です。したがって，今得られている標本から計算した標本平均 $\bar{X}_A, \bar{X}_B$ と「プールされた不偏分散」s^2 を使って (5) 式を計算したとき，それが「$-t_{0.025}(n_A+n_B-2)$ 以上，$t_{0.025}(n_A+n_B-2)$ 以下」の範囲に入っていなければ，「5%の確率でしか起こらないことが起きている」ことになるので，帰無仮説を棄却します。

ここでは，両母集団の母分散が等しい，すなわち $\sigma_A^2 = \sigma_B^2 = \sigma^2$ という，２標本問題のいちばん簡単な場合を示しましたが，その他さまざまな場合の２標本問題を取り扱う方法が研究されています。

今日の演習

今日の２標本検定の例題に答えてください。

付録：「プールされた不偏分散」について

本文 (3) 式の，「プールされた不偏分散」s^2 を使った t 統計量の式を，以下のように変形します。

$$\begin{aligned} t &= \frac{(\bar{X}_A - \bar{X}_B) - (\mu_A - \mu_B)}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}\right) s^2}} && \text{(A1)} \\ &= \frac{\dfrac{\{(\bar{X}_A - \bar{X}_B) - (\mu_A - \mu_B)\}}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}\right) \sigma^2}}}{\dfrac{\sqrt{\left(\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}\right) s^2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}\right) \sigma^2}}} \\ &= \frac{\dfrac{\{(\bar{X}_A - \bar{X}_B) - (\mu_A - \mu_B)\}}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}\right) \sigma^2}}}{\sqrt{s^2/\sigma^2}} \end{aligned}$$

ところで，母集団 A，母集団 B それぞれの標本における不偏分散 s_A^2, s_B^2 について，χ^2 分布（第１２回で説明します）と不偏分散の関係[3]から

$$(n_A - 1)\frac{s_A^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_A - 1), \quad (n_B - 1)\frac{s_B^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_B - 1) \qquad \text{(A2)}$$

という関係があります。第１２回講義の付録１で述べる χ^2 分布の定義のとおり，「自由度 n の χ^2 分布」は「それぞれが標準正規分布にしたがう n 個の独立な確率変数の合計」がしたがう分布ですから，(A2) 式の２つの式は次のように合計することができます。

$$\begin{aligned} (n_A - 1)\frac{s_A^2}{\sigma^2} + (n_B - 1)\frac{s_B^2}{\sigma^2} &\sim \chi^2((n_A - 1) + (n_B - 1)) && \text{(A3)} \\ \text{つまり} \quad \frac{(n_A - 1)s_A^2 + (n_B - 1)s_B^2}{\sigma^2} &\sim \chi^2(n_A + n_B - 2) \end{aligned}$$

そこで，２標本問題における不偏分散 s^2 を，本文 (2) 式のとおり

$$s^2 = \frac{(n_A - 1)s_A^2 + (n_B - 1)s_B^2}{n_A + n_B - 2} \qquad \text{(A4)}$$

と定義すると，(A2) 式の分母は

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{s^2}{\sigma^2}} &= \sqrt{\frac{(n_A - 1)s_A^2 + (n_B - 1)s_B^2}{n_A + n_B - 2} \cdot \frac{1}{\sigma^2}} && \text{(A5)} \\ &= \sqrt{\frac{1}{n_A + n_B - 2} \cdot \frac{(n_A - 1)s_A^2 + (n_B - 1)s_B^2}{\sigma^2}} \end{aligned}$$

となり，(A4) 式より，$\sqrt{}$ の中の後半が自由度 $(n_A + n_B - 2)$ の χ^2 分布にしたがいますから，t 分布の定義[4]から，(A2) 式の t は自由度 $(n_A + n_B - 2)$ の t 分布にしたがいます。よって，プールされた不偏分散を本文 (2) 式の s^2 で定義します。

[3]私の講義（広島大）・2010 年度後期「情報統計学」第１３回で説明しています。
[4]私の講義（広島大）・2010 年度後期「情報統計学」第１４回で説明しています。