## 2012年度秋学期　解析応用　第３回

# 第１部・フーリエ解析／　フーリエ級数の収束性

### なんか，だまされているような気がする

前回，関数 $f(x)$ を，周期 $\frac{L}{n}$ の波を表す指数関数 $\exp(i2\pi\frac{n}{L})$ の級数で

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(i2\pi\frac{n}{L}x\right) \tag{1}$$

と表し，さらにフーリエ係数 $a_k$ は指数関数の直交性を使って

$$a_k = \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x)\exp\left(-i2\pi\frac{k}{L}x\right)dx \tag{2}$$

という積分で求められる，と説明しました。

しかし，この話は重要な点をごまかしています。(1) 式の級数を示したときには，「$f(x)$ が波の足し合わせであるとすれば，級数の各項は周期 $L, L/2, L/3, \ldots$ の波でしかありえない」といっただけで，この級数が $f(x)$ に収束するとはひとことも言っていません。

そこで，今回の講義では，この級数が本当に $f(x)$ に収束するのか，おかしなことになることはないのか，について説明します。実は，多少おかしなことになる場合もあります。

### フーリエ級数の収束性

結論からいうと，フーリエ級数の収束性は次の **Dirichlet（ディリクレ）の定理**で表されます。

> 周期 $L$ の周期関数 $f(x)$ のフーリエ係数 $a_k$ が (2) 式で定義されるとき，$f(x)$ が「区分的になめらか」であれば，(1) 式のフーリエ級数は
>
> $$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} \tag{3}$$
>
> に収束する。

ここで，「任意の有界な区間において，$f(x)$ の不連続点はあっても有限個で，その不連続点では左からの極限も右からの極限も存在する」ことを「$f(x)$ は区分的に連続」といいます。そして，$f(x)$ も $f'(x)$ も区分的に連続なとき，「$f(x)$ は区分的になめらか」といいます。直感的にいえば，「段差や折り目はあるが，ちぎれてしまっているところはない」ということです。

また，$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ は，$f(x)$ の連続点では $f(x)$ そのもの，不連続点では，左からの極限と右からの極限の平均を意味します。ですから，フーリエ級数は「たいてい」もとの関数 $f(x)$ に収束するが，段差のところでは少しだけ違うものになる，ということになります。

### Riemann-Lebesgue の定理と，積分の収束

Dirichlet の定理を証明するのに必要なのが，次の **Riemann-Lebesgue（リーマン・ルベーグ）の定理**です。

$f(x)$ が区分的に連続のとき，任意の $a, b$ について

$$\lim_{n\to\pm\infty}\int_a^b f(x)\exp(-inx)dx = 0 \tag{4}$$

がなりたつ。

この定理にある積分は，フーリエ係数を定義した (2) 式と同じ形になっています。つまり，この定理は「周波数が無限に大きくなると，フーリエ係数は 0 に収束する」ことを示しています。波が十分に細かければ，$f(x)$ が（区分的に連続であれば）何であっても，波の山と谷が打ち消しあって積分すると消えてしまう，というのが直感的イメージです。

この定理を，$n \to +\infty$ の場合に証明します。

$$F = \int_a^b f(x)\exp(-inx)dx \tag{5}$$

とおきます。この積分で，$x = t + \dfrac{\pi}{n}$ と置換すると，$dx = dt$ で，$x = a$ のとき $t = a - \dfrac{\pi}{n}$，$x = b$ のとき $t = b - \dfrac{\pi}{n}$ ですから

$$\begin{aligned}
F &= \int_{a-\frac{\pi}{n}}^{b-\frac{\pi}{n}} f(t+\frac{\pi}{n})\exp(-in(t+\frac{\pi}{n}))dt \\
&= \int_{a-\frac{\pi}{n}}^{b-\frac{\pi}{n}} f(t+\frac{\pi}{n})\exp(-int)\exp(-in\frac{\pi}{n}))dt \\
&= -\int_{a-\frac{\pi}{n}}^{b-\frac{\pi}{n}} f(t+\frac{\pi}{n})\exp(-int)dt
\end{aligned} \tag{6}$$

です。積分変数は何でもいいので，(6) 式についても積分変数を $x$ にしましょう。これらの和をとり，積分区間ごとに 3 つの項に分けると

$$\begin{aligned}
2F &= \int_a^b f(x)\exp(-inx)dx - \int_{a-\frac{\pi}{n}}^{b-\frac{\pi}{n}} f(x+\frac{\pi}{n})\exp(-inx)dx \\
&= -\int_{a-\frac{\pi}{n}}^{a} f(x+\frac{\pi}{n})\exp(-inx)dx + \int_a^{b-\frac{\pi}{n}}\left\{f(x)-f(x+\frac{\pi}{n})\right\}\exp(-inx)dx + \int_{b-\frac{\pi}{n}}^{b} f(x)\exp(-inx)dx
\end{aligned} \tag{7}$$

となります。$f(x)$ が区分的に連続ということは，どんな有界な区間をとっても，その間の点で右からの極限も左からの極限も存在するので，$f(x)$ は有界です。したがって，$n \to \infty$ のとき，第 1 項と第 3 項は積分区間の幅が 0 になるので積分の値も 0 に収束します。

第 2 項も，$f(x)$ が区分的に連続なので，積分区間を $f(x) - f(x+\dfrac{\pi}{n})$ が連続である区間に分割することができます。それぞれの区間では $n \to \infty$ のとき $f(x) - f(x+\dfrac{\pi}{n})$ は 0 に収束するので，第 2 項も 0 に収束します。■

ところで，さきほど「直感的イメージ」として，「山と谷が打ち消しあって，積分すると 0」と述べました。しかし，$f(x)$ に段差があるところでは，本当にそのイメージでいいのでしょうか。$f(x)$ が連続なところでは，波を十分細かくすれば山と谷は打ち消し合いますが，段差のところでは，いくら波を細かくしても，段差の両側では差し引きすることができません。それでも積分としてはやはり 0 に収束するのは，周波数が無限に大きくなると，今度は差し引きできない部分の幅が 0 に近づくので，積分には影響しなくなってしまうからです。

### フーリエ級数の収束性

では，フーリエ級数の収束性，すなわち Dirichlet の定理を証明します。式を簡単にするために，周期 $L$ を，それが $2\pi$ になるような適当な単位で表すことにすると，(1) 式のフーリエ級数は

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp(inx) \tag{8}$$

となり[1]，フーリエ係数は

$$a_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\exp(-ikx)\,dx \tag{9}$$

となります。

(8) 式のフーリエ級数の部分和を $S_n(x)$ とすると

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} a_k \exp(ikx) \tag{10}$$

となります。これに (9) 式のフーリエ係数を代入すると

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\exp(-ikt)\,dt\right\}\exp(ikx) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sum_{k=-n}^{n}\exp(-ik(t-x))\,dt \tag{11}$$

で，この式の総和の部分は，初項 $\exp(in(t-x))$，公比 $\exp(-i(t-x))$，項数 $2n+1$ の等比数列の和なので，

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\exp(in(t-x))\left[1-\exp(-i(t-x)(2n+1))\right]}{1-\exp(-i(t-x))}dt \tag{12}$$

となります。ここで $t-x=s$ と変数変換すると

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-x-\pi}^{-x+\pi} f(x+s)\frac{\exp(ins)\left[1-\exp(-i(2n+1)s)\right]}{1-\exp(-is)}ds \tag{13}$$

となり，さらに分母分子に $\exp\left(\dfrac{is}{2}\right)$ をかけると

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-x-\pi}^{-x+\pi} f(x+s)\frac{\exp\left(\frac{is}{2}\right)\left\{\exp(ins)-\exp(-i(n+1)s)\right\}}{\exp\left(\frac{is}{2}\right)-\exp\left(\frac{-is}{2}\right)}ds \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-x-\pi}^{-x+\pi} f(x+s)\frac{\exp\left(i(n+\frac{1}{2})s\right)-\exp\left(-i(n+\frac{1}{2})s\right)}{\exp\left(\frac{is}{2}\right)-\exp\left(\frac{-is}{2}\right)}ds \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-x-\pi}^{-x+\pi} f(x+s)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})s}{2\sin\frac{s}{2}}ds \end{aligned} \tag{14}$$

となります。ここに現れている関数は，すべて周期 $2\pi$ の周期関数ですから，積分区間を $[-\pi,\pi]$ にしても「1 周期分」積分していることにはかわりありません。よって，

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+s)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})s}{2\sin\frac{s}{2}}ds \tag{15}$$

[1]等号でなく $\sim$ を使っているのは，右辺が $f(x)$ に収束するかどうかまだわからない，という意味を強調しています。

となります[2]。

さて，この先の話を進めるために $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})s}{2\sin\frac{s}{2}}ds$ の値を求めます。三角関数の積和の公式より，

$$2\cos ks\sin\frac{s}{2}=\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)s-\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)s \tag{16}$$

という関係が得られます。そこで，

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{2}+\cos s+\cos 2s+\cdots+\cos ns\right)\sin\frac{1}{2}s\\&=\frac{1}{2}\left[\sin\frac{1}{2}s+2\cos s\sin\frac{1}{2}s+2\cos 2s\sin\frac{1}{2}s+\cdots+2\cos ns\sin\frac{1}{2}s\right]\\&=\frac{1}{2}\left[\sin\frac{1}{2}x+\left(\sin\frac{3}{2}x-\sin\frac{1}{2}x\right)+\left(\sin\frac{5}{2}x-\sin\frac{3}{2}x\right)+\cdots+\left(\sin(n+\frac{1}{2})x-\sin(n-\frac{1}{2})x\right)\right]\\&=\frac{1}{2}\sin(n+\frac{1}{2})x\end{aligned} \tag{17}$$

となるので，

$$\frac{\sin(n+\frac{1}{2})s}{2\sin\frac{1}{2}s}=\frac{1}{2}+\cos s+\cos 2s+\cdots+\cos ns \tag{18}$$

となります。よって，

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})s}{2\sin\frac{s}{2}}ds=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2}+\cos s+\cos 2s+\cdots+\cos ns\right)ds=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\pi=\frac{1}{2} \tag{19}$$

が得られます。同様に，

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})s}{2\sin\frac{s}{2}}ds=\frac{1}{2} \tag{20}$$

も得られます。

さて，上の２つの式から，

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x-0)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})s}{2\sin\frac{s}{2}}ds+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x+0)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})s}{2\sin\frac{s}{2}}ds \tag{21}$$

とすることができます。一方，(15) 式から

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x+s)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})s}{2\sin\frac{s}{2}}ds+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x+s)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})s}{2\sin\frac{s}{2}}ds \tag{22}$$

です。よって，

$$\begin{aligned}&S_n(x)-\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\\&\quad=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{f(x+s)-f(x-0)}{2\sin\frac{s}{2}}\sin(n+\frac{1}{2})sds+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(x+s)-f(x+0)}{2\sin\frac{s}{2}}\sin(n+\frac{1}{2})sds\end{aligned} \tag{23}$$

[2] この式の $\dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})s}{2\sin\frac{s}{2}}$ をディリクレ核とよびます。

ここで，$\dfrac{f(x+s)-f(x-0)}{2\sin\frac{s}{2}}$ と $\dfrac{f(x+s)-f(x+0)}{2\sin\frac{s}{2}}$ がどちらも積分区間で区分的に連続なら，Riemann-Lebesgue の定理により[3]，$n\to\infty$ のとき右辺は 0 に収束するので，Dirichlet の定理が証明されます。そこはどうでしょうか。

$\dfrac{f(x+s)-f(x-0)}{2\sin\frac{s}{2}}$ について考えると，$f(x)$ は区分的に連続ですから，$s=-0$ 以外では区分的に連続なのが明らかです。問題は $s=-0$ のときですが，この式について $s\to-0$ の極限を求めると

$$\begin{aligned}\lim_{s\to-0}\frac{f(x+s)-f(x-0)}{2\sin\frac{s}{2}} &= \lim_{s\to-0}\frac{f(x+s)-f(x-0)}{s}\cdot\frac{\frac{s}{2}}{\sin\frac{s}{2}}\\ &= \lim_{s\to-0}\frac{f(\{x-0\}+s)-f(x-0)}{s}\cdot\frac{\frac{s}{2}}{\sin\frac{s}{2}}\end{aligned} \tag{24}$$

となります。右辺の積の前半は微分の形になっていて，極限は $f'(x-0)$ になります[4]。$f(x)$ は区分的になめらかですから，導関数 $f'(x)$ は区分的に連続で，有界な $f'(x-0)$ が存在します[5]。一方，右辺の積の後半については，$s\to 0$ のとき $\dfrac{\frac{s}{2}}{\sin\frac{s}{2}}\to 1$ です。よって，(24) 式の極限が存在するので，$\dfrac{f(x+s)-f(x-0)}{2\sin\frac{s}{2}}$ は区分的に連続です。$\dfrac{f(x+s)-f(x+0)}{2\sin\frac{s}{2}}$ についても同様です。

以上で，Dirichlet の定理が証明されました。周期関数 $f(x)$ のフーリエ級数は「たいてい」もとの $f(x)$ に収束するが，段差のところでは「左からの極限と右からの極限の平均」になることがわかります。

前回の例題では，

$$\begin{gathered}f(x)=\begin{cases}-1 & -\frac{L}{2}<x<0\\ 1 & 0<x<\frac{L}{2}\end{cases}\\ f(x+L)=f(x)\end{gathered} \tag{25}$$

ですから，$x=\cdots-2L,-L,0,L,2L,\ldots$ で段差があり，そのときフーリエ級数は 0 です。上の $f(x)$ は，$x=\cdots-2L,-L,0,L,2L,\ldots$ では定義されていませんが，フーリエ級数はこれらの点で $+1$ と $-1$ の平均すなわち 0 に収束します。

ただし，段差の前後では，Riemann-Lebesgue の定理のところで触れたように，「波の凹凸が消えるのは，（他の部分のように）波の山と谷が打ち消し合うからではなく，山や谷の幅が限りなく狭くなるから」という現象がおきます。したがって，級数を途中で打ち切ると，段差の前後だけ大きく波が残ります[6]。「段差においてはフーリエ級数が段差の前後の平均に収束する」という結論は，段差の前後に残った波が，幅が限りなく狭くなった結果，互いに打ち消し合ってそれらの平均に収束する，と理解することができます（図 1）。

## 参考文献

千葉逸人，これならわかる 工学部で学ぶ数学，プレアデス出版，ISBN4-7687-0882-X
山本稔，微分方程式とフーリエ解析，学術図書出版，ISBN978-4-87361-117-4（絶版）
富山大学理学部幸山研究室，2007 年度「離散数理」第 6 回「フーリエ変換 (3)」 http://kouyama.math.u-toyama.ac.jp/main/education/2007/discmath/

[3] (4) 式の指数関数を cos と sin に分けて考えます。
[4] $f'(x)$ ではないことに注意。
[5] $f'(x)$ は，存在しない点があるかもしれません。
[6] 数学では**ギブスの現象**，信号処理では**リンギング**といいます。

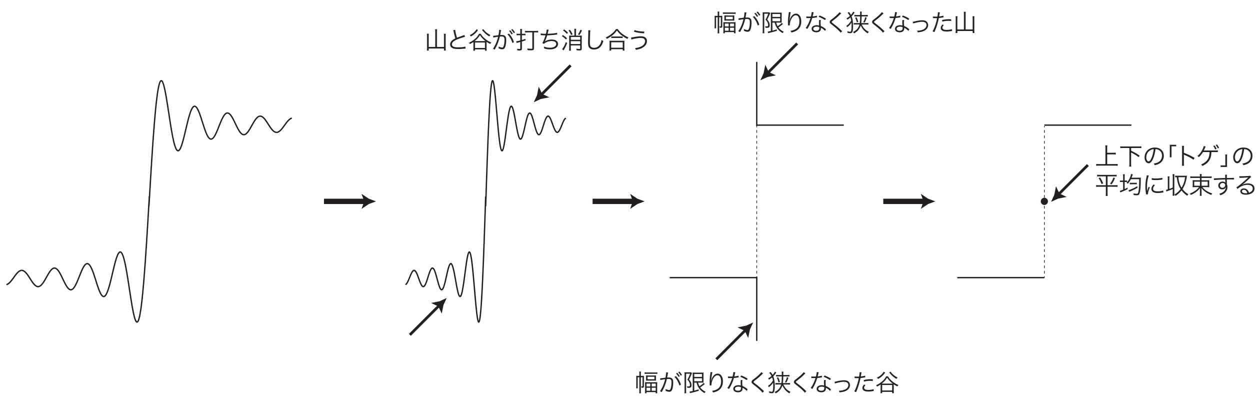


図 1: 段差の部分でのフーリエ級数の収束