

フーリエ積分とフーリエ変換

ここまでは、周期関数を三角関数（虚数指数の指数関数）の級数，すなわち「波の足し合わせ」で表したフーリエ級数について説明しました。では，元の関数が，周期関数でない一般の関数のときは，どうなるでしょうか。

この場合は，「周期が無限大である」と考えます。すなわち，前回の例では，周期関数 $f(x)$ の周期を L としましたが，今回は $L \rightarrow \infty$ となったときの極限を考えます。

フーリエ級数の式

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(i2\pi \frac{n}{L}x\right) \quad (1)$$

は，関数 $f(x)$ が基本周期が $L, L/2, L/3, \dots, L/n, \dots$ の波の足し合わせであることを示しています。ここで L が大きくなると， n/L と $(n+1)/L$ の差 $1/L$ は小さくなります。このことは， $f(x)$ をフーリエ級数で表したとき，隣り合う波の周波数の差は小さくなってゆくことを示しています。

そこで，この周波数の差 $1/L$ を $\Delta\nu$ で表すことにします。このとき，上のフーリエ級数の式と，フーリエ係数の式

$$a_k = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x) \exp\left(-i2\pi \frac{k}{L}x\right) dx \quad (2)$$

をあわせると，上の $\Delta\nu$ を使って

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\Delta\nu \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(\tau) \exp(-i2\pi n \Delta\nu \tau) d\tau \right) \exp(i2\pi n \Delta\nu x) \quad (3)$$

となります。 $n\Delta\nu$ は，（周波数の差） \times （項の個数）ですからある周波数をさします。これを，周波数 ν で表します。また， $L \rightarrow \infty$ のとき $\Delta\nu \rightarrow 0$ ですから， $\Delta\nu$ を含む総和は， $d\nu$ を含む積分になります。よって，

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \exp(-i2\pi\nu\tau) d\tau \right) \exp(i2\pi\nu x) d\nu \quad (4)$$

が得られます。 $f(x)$ は，もはや「波の足し合わせ」とはいえず，積分で表されることになりました。これを**フーリエ積分**といいます。

フーリエ積分を，

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-i2\pi\nu x) dx \quad (5)$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) \exp(i2\pi\nu x) d\nu \quad (6)$$

のように分けて表すとき，(5) 式を**フーリエ変換** (Fourier transformation)，(6) 式を**逆フーリエ変換** (inverse Fourier transformation) とよびます。関数 $F(\nu)$ は，もとの関数 $f(x)$ に，どのような周波数の波がどの程度含まれているかを表しています。上で述べたように，フーリエ級数において $T \rightarrow \infty$ としたので，級数で隣接する波の間隔が 0 に近づいていきます。したがって，フーリエ係数の並び $\{a_k\}$ は，ついに実数の周波数 ν の関数 $F(\nu)$ に達するわけです。

$f(x)$ が存在する空間を**実空間**, $F(\nu)$ が存在する空間を**周波数空間**とよびます。また, $f(x)$ と $F(\nu)$ を**フーリエ変換対**とよびます。 $f(x)$ のフーリエ変換を $FT[f(x)](\nu)$ あるいは $\mathcal{F}[f(x)](\nu)$ と, また $F(\nu)$ の逆フーリエ変換を $FT^{-1}[F(\nu)](x)$ あるいは $\mathcal{F}^{-1}[F(\nu)](x)$ と書くこともあります。

なんかごまかされている気がする

級数とは可算無限個の項の和ですから, その「間隔」がいくら縮まっても, 可算無限個であることには変わりはなく, その「隙間」がくっついて連続にはならないはず。「フーリエ係数の並び $\{a_k\}$ は, ついに実数の周波数 ν の関数 $F(\nu)$ に達する」というのは変ではないでしょうか?

$F(\nu)$ が実数で定義された関数で表されるのは, (3) 式で級数の中に $\Delta\nu$ という「間隔」が入っているからです。 $\Delta\nu$ は隣同士の波の周波数の差ですから, 上で述べた「隙間」は $\Delta\nu$ によってもともと埋まっていた, ということになります。

この部分を「幅がないのに積分すると 1」という変な関数を導入して, うまく整理してしまったのが, 後で述べるデルタ関数です。

本当に収束するのか?

フーリエ級数が本当は $f(x)$ そのものではなく $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ に収束するように, フーリエ積分も, 本当は (4) 式の左辺は $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ になります。また, (4) 式がなりたつのは, $f(x)$ はフーリエ級数の場合と同様に区分的になめらかで, かつ絶対可積分, すなわち

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx \quad (7)$$

のときです。この「絶対可積分」の条件は, フーリエ積分の収束を証明するためには積分の順序交換が必要で, そのためには $|F(\nu)|$ が一様収束する必要がある, その条件が $f(x)$ の絶対可積分なのですが, 詳細は省略します。なお, これもデルタ関数とのからみで, 「絶対可積分でない」関数のフーリエ変換があとで出てきます¹。

フーリエ変換に関する諸定理

以下, $F(\nu) = FT[f(x)](\nu), G(\nu) = FT[g(x)](\nu)$ とします。

線形性

「和・定数倍のフーリエ変換」 = 「フーリエ変換の和・定数倍」です。

$$FT[af(x) + bg(x)] = aF(\nu) + bG(\nu). \quad (8)$$

フーリエ変換の定義から明らかです。■

¹例えば文献 [3] を参照してください。ここを省略してしまうのは, 絶対可積分でない関数に拡張されたフーリエ変換のほが応用上おもしろいからです。

拡大・縮小

「実空間での拡大（縮小）」＝「周波数空間での縮小（拡大）」です。

$$FT[f(ax)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\nu}{a}\right). \quad (9)$$

なぜならば、

$$FT[f(ax)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(ax) \exp(-i2\pi\nu x) dx \quad (10)$$

で、 $ax = t$ と置換すると、 $x = \frac{t}{a}$, $adx = dt$ ですから

$$\begin{aligned} FT[f(ax)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp\left(-i2\pi\frac{\nu t}{a}\right) \frac{1}{a} dt \\ &= \frac{1}{a} F\left(\frac{\nu}{a}\right) \end{aligned} \quad (11)$$

となるからです。■

シフト

「実空間での移動」＝「周波数空間での位相のずれ」, 「実空間での変調（波に関数をかけ算する）」＝「周波数空間での移動」です。

$$\begin{aligned} FT[f(x-a)] &= F(\nu) \exp(-i2\pi a\nu) \\ FT[f(x) \exp(i2\pi\nu_0 x)] &= F(\nu - \nu_0). \end{aligned} \quad (12)$$

なぜならば、上の式は

$$FT[f(x-a)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-a) \exp(-i2\pi\nu x) dx \quad (13)$$

で、 $x-a = t$ と置換すると、 $x = t+a$, $dx = dt$ ですから

$$\begin{aligned} FT[f(x-a)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i2\pi(t+a)\nu) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i2\pi t\nu) dt \cdot \exp(-i2\pi a\nu) \\ &= F(\nu) \exp(-i2\pi a\nu) \end{aligned} \quad (14)$$

となるからです。下の式も同様です。■

積とコンヴォリューション

「積のフーリエ変換」＝「フーリエ変換のコンヴォリューション」, 「コンヴォリューションのフーリエ変換」＝「フーリエ変換の積」です。

$$\begin{aligned} FT[f(x)g(x)](\nu) &= [F * G](\nu) \\ FT\{f * g\}(x)(\nu) &= F(\nu)G(\nu). \end{aligned} \quad (15)$$

ここで、記号「*」で表されるコンヴォリューション (convolution, 畳み込み積分) は、

$$\{f * g\}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(t-y)dy \quad (16)$$

と定義されます。コンヴォリューションの意味は、デルタ関数を使って説明すると理解しやすいので、そのときに説明します。

証明は以下のとおりです。逆フーリエ変換の式 ((6) 式) から、

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) \exp(i2\pi\nu x) d\nu \int_{-\infty}^{\infty} G(\mu) \exp(i2\pi\mu x) d\mu \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu)G(\mu) d\nu \exp(i2\pi(\nu + \mu)x) d\mu \end{aligned} \quad (17)$$

となります。ここで $\nu + \mu = \xi$ と変数変換すると

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu)G(\xi - \nu) d\nu \exp(i2\pi\xi x) d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [F * G](\xi) \exp(i2\pi\xi x) d\xi \\ &= FT^{-1}[F * G](x) \end{aligned} \quad (18)$$

となるので、(18) 式の逆変換を考えると (15) 式の上の式が得られます。下の式も、フーリエ変換と逆変換を入れ替えれば同様に証明されます。■

Parseval の等式

$f(x)$ が実関数で、2乗可積分すなわち

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < +\infty \quad (19)$$

であるとき、

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\nu)|^2 d\nu \quad (20)$$

がなりたちます。これを Parseval (パーシヴァル) の等式といいます。これは、実空間での関数を何かの波動と考えると、その波動全体のもつエネルギーと、周波数空間での各周波数の波のエネルギーの合計が等しいことを意味しています。

証明は以下のとおりです。以下、 $g(x)$ も実関数とします。上のコンヴォリューションに関する定理から

$$\begin{aligned} FT[f(x)g(x)] &= [F * G](\nu) \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x) \exp(-i2\pi\nu x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} F(y)G(\nu - y) dy \end{aligned} \quad (21)$$

で、ここで $\nu = 0$ とおくと

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(y)G(-y) dy \quad (22)$$

となります。 G^* を G の複素共役とすると、

$$\begin{aligned} G^*(\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \exp(i2\pi\nu x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \exp(-i2\pi(-\nu)x) dx \\ &= G(-\nu) \end{aligned} \tag{23}$$

ですから、(22) 式から

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(y)G^*(y)dy \tag{24}$$

が得られ、 $f(x) = g(x)$ とすると (20) 式が得られます。 ■

矩形関数のフーリエ変換

矩形関数 $\text{rect}(x)$ は、

$$\text{rect}(x) = \begin{cases} 0 & |x| > \frac{1}{2} \\ 1 & |x| < \frac{1}{2} \end{cases} \tag{25}$$

で定義されます。矩形関数のフーリエ変換は

$$\begin{aligned} FT[\text{rect}(x)](\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(x) \exp(-i2\pi\nu x) dx \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \exp(-i2\pi\nu x) dx \\ &= \frac{1}{-i2\pi\nu} [\exp(-i2\pi\nu x)]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\pi\nu} \cdot \frac{\exp(i\pi\nu) - \exp(-i\pi\nu)}{2i} = \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu} \end{aligned} \tag{26}$$

となります。この $\frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}$ を sinc 関数といい、 $\text{sinc}(\nu)$ と書きます。同様に、周波数空間の矩形関数を逆フーリエ変換すると、実空間の sinc 関数となります。

ある関数に矩形関数をかけると、その関数のある区間に制限することができます。実空間では関数の存在する範囲の制限、周波数空間では帯域の制限となります。

参考文献

1. H. P. Hsu (佐藤平八訳), フーリエ解析, 森北出版, ISBN4-627-93010-0
2. 伊東一良編, 原理がわかる・現場で使える 信号処理, 丸善, ISBN978-4-621-08210-2
3. 千葉逸人, これならわかる 工学部で学ぶ数学, プレアデス出版, ISBN4-7687-0882-X

なお、各参考書では周波数 ν のかわりに角周波数 $\omega = 2\pi\nu$ を使って説明されていることも多く、その場合係数等が違っていることに注意してください。また、フーリエ変換と逆フーリエ変換につく係数も表現のしかたによって違ってきます。