

「ひとつの波」のフーリエ変換

フーリエ級数の考え方は、周期関数を三角関数（指数関数）の足し合わせで表した時、それぞれの三角関数（指数関数）がどれくらい含まれているか（波の振幅がどのくらいか）を求めよう、というものです。そして、フーリエ変換は、対象を非周期関数に拡大した場合でも、各周波数の三角関数（指数関数）の振幅を、周波数空間における関数で表したものです。

では、周波数 ν_0 の指数関数 $f(x) = \exp(i2\pi\nu_0x)$ 「だけ」をフーリエ変換すると、どうなるでしょうか。フーリエ級数の考え方からすると、ひとつの指数関数はそのまま、項がひとつだけのフーリエ級数になっています。しかし、フーリエ変換の定義からは

$$\begin{aligned} F(\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i2\pi\nu_0x) \exp(-i2\pi\nu x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i2\pi(\nu_0 - \nu)x) dx \end{aligned} \quad (1)$$

となりますが、この積分は明らかに収束しません。そもそも、 $\exp(i2\pi\nu_0x)$ は絶対可積分ではありませんから、フーリエ変換は求められません。

これはおかしなことです。フーリエ変換がフーリエ級数を自然に拡張したものであるならば、周波数 ν_0 の指数関数のフーリエ変換は、「周波数 ν_0 のみに値をもつ関数」になるはずです。

ディラックのデルタ関数は、この「周波数 ν_0 のみに値をもつ関数」をうまく定義したものです。これを使うと、絶対可積分でない関数にもフーリエ変換を拡張することができます。

デルタ関数

デルタ関数 $\delta(x)$ は「単位インパルス関数」ともいわれ、要は「 $x = 0$ にのみにピークをもち、他はゼロ」という関数です。 $\delta(x)$ の定義にはいろいろありますが、その本質は

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0) \quad (2)$$

という性質にあります。つまり、 $\delta(x)$ は「積分することによって $f(x)$ から $f(0)$ を切り出す」関数です。

ここで、 $f(x)$ として「恒等的に 1」という関数を考えると、 $f(0)$ も当然 1 ですから

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1 \quad (3)$$

が得られます。また、(2) 式の右辺は $x = 0$ 以外の $f(x)$ の値に無関係であることから、 $\delta(x) = 0 (x \neq 0)$ が導かれます。よって、最初に述べた「 $x = 0$ にのみにピークをもち、他はゼロ」という理解が導かれます。

これらの式で用いている積分は、通常の意味の積分ではありません。 $x = 0$ 以外ですべて 0 の関数を、全実数にわたって積分すれば、それは 0 になるはずですが、ここでの積分は、デルタ関数とはこういうものだと述べるために用いています¹。

¹これが「超関数」の考えの第一歩になります。

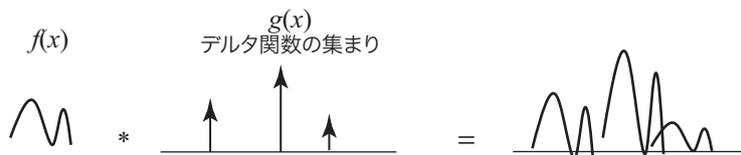


図 1: コンヴォリューションのデルタ関数による理解

ここで

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\delta((x-T)-y)dy \quad (4)$$

を考えます。明らかに $\delta(x) = \delta(-x)$ で、 $y - (x - T) = t$ と変換すると $dy = dt, y = t + (x - T)$ なので、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\delta((x-T)-y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(t+(x-T))\delta(t)dt \quad (5)$$

となり、(2)式からこれは $f(x-T)$ に等しいことがわかります。この関係は、 $f(x-T)$ は「 $f(x)$ と、 T だけシフトされたデルタ関数 $\delta(x-T)$ とのコンヴォリューション」に等しいことを示しています。

このことから、コンヴォリューションの意味合いが理解できます。 $f(x)$ と $g(x)$ のコンヴォリューション $[f * g](x)$ を考える時、 $g(x)$ がデルタ関数の組み合わせでできているのなら、 $[f * g](x)$ は「 $g(x)$ を構成している各デルタ関数のピークの位置に、 $f(x)$ のコピーを貼り付けたもの」ということができます (図 1)。

デルタ関数とフーリエ変換

デルタ関数に関する上記の関係から、デルタ関数 $\delta(x)$ を定義通りフーリエ変換すると、

$$\begin{aligned} FT[\delta(x)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \exp(-i2\pi\nu x) dx \\ &= \exp(-i2\pi\nu x)|_{x=0} = 1 \end{aligned} \quad (6)$$

となります。このことは、実空間でのデルタ関数、すなわち「瞬間的ピーク」は、「全周波数を一様に含む」ことを示しています。同様に、

$$\begin{aligned} FT^{-1}[\delta(\nu)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\nu) \exp(i2\pi\nu x) dx \\ &= \exp(i2\pi\nu x)|_{\nu=0} = 1 \end{aligned} \quad (7)$$

ですから、 $FT[1] = \delta(\nu)$ です。このことは、実空間で一様な値をとる定数関数は、周波数空間では「周波数 0 にたつピーク」にあたることを示しています。

さらに、前回説明した「シフト」に関する定理、すなわち $FT[f(x) \exp(i2\pi\nu_0 x)] = F(\nu - \nu_0)$ で $f(x) \equiv 1$ とすると、上の関係から $FT[\exp(i2\pi\nu_0 x)] = \delta(\nu - \nu_0)$ となります。これが、最初に述べた「波のフーリエ変換」に対する答えで、たしかに周波数 ν_0 にピークがたつこととなります。

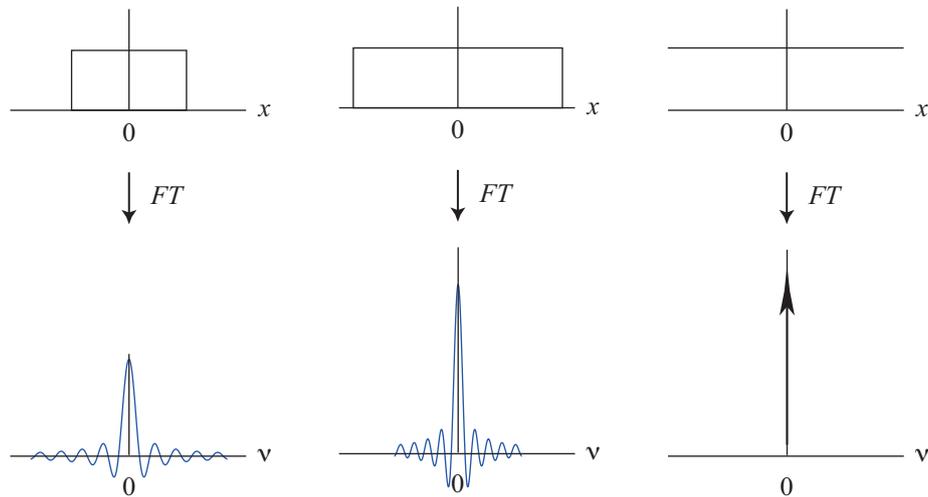


図 2: 矩形関数のフーリエ変換とデルタ関数

矩形関数とデルタ関数

前回, 矩形関数 $\text{rect}(x)$, すなわち

$$\text{rect}(x) = \begin{cases} 0 & |x| > \frac{1}{2} \\ 1 & |x| < \frac{1}{2} \end{cases} \quad (8)$$

のフーリエ変換が, $\text{sinc}(\nu) = \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}$ であることを説明しました。ここで, $\text{rect}(\frac{x}{a})$ を考えると, その定義は

$$\text{rect}\left(\frac{x}{a}\right) = \begin{cases} 0 & \left|\frac{x}{a}\right| > \frac{1}{2} \\ 1 & \left|\frac{x}{a}\right| < \frac{1}{2} \end{cases} \quad (9)$$

ですから,

$$\text{rect}\left(\frac{x}{a}\right) = \begin{cases} 0 & |x| > \frac{a}{2} \\ 1 & |x| < \frac{a}{2} \end{cases} \quad (10)$$

となります。一方, フーリエ変換の「拡大・縮小」に関する定理に $\text{rect}(\frac{x}{a})$ を当てはめると, $FT[\text{rect}(\frac{x}{a})] = a\text{sinc}(a\nu)$ となります。

したがって, $a \rightarrow \infty$ の極限を考えると, $\text{rect}(\frac{x}{a})$ は幅が実数全体に広がって「恒等的に 1」になります。一方, $a\text{sinc}(a\nu)$ の $a \rightarrow \infty$ の極限は, $\text{sinc}(\nu)$ を左右から押しつぶして, ピークの高さが無限に大きくなっていく形になります。上述の通り, 「恒等的に 1」の関数のフーリエ変換はデルタ関数ですから, デルタ関数を sinc 関数の極限として理解することができます (図 2)。

ただし, デルタ関数を「高さが無限のピーク」と理解するのはよくないと思います。「無限」といってしまうと, $\delta(x)$ の 2 倍である $2\delta(x)$ などを考えることができません。デルタ関数の重要な性質は, あくまで (2) 式で述べたものです。

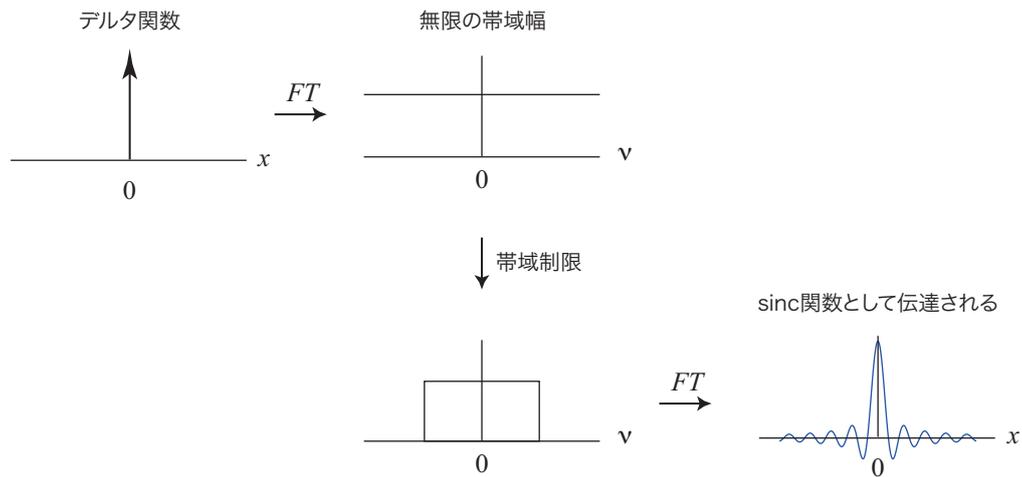


図 3: 有限の帯域幅によるデルタ関数の伝達

帯域制限とは

矩形関数のフーリエ変換を使って、信号処理における「帯域制限」の問題を考えることができます。

物理現象による情報の伝送路においては、それが空気の振動による音の伝導であれ、電氣的なものであれ、光学的なものであれ、無限の周波数の幅（帯域幅）を伝達できることはありません。デルタ関数の伝達には無限の帯域幅を要するため、物理的な伝送路で伝えることはできません²。

たとえば、ある物体の像を伝達するとします。物体の各点をデルタ関数と考えると、それぞれのデルタ関数は周波数空間では「恒等的に1」の定数関数で表されますから、この関数を表すのに無限の帯域幅が必要です。これを有限の帯域幅で表すことは、周波数空間で矩形関数をかけることに相当します。これを逆フーリエ変換して実空間に戻すと、上述の通り sinc 関数になります（図3）。

つまり、元の1点が、伝送路を通ると1点に写像されず、sinc 関数に写像されてしまうのです。これが帯域制限による影響で、画像の場合は「ぼけ」に相当します。

参考文献

上記のほか、信号伝達に関する応用については、私の「画像情報処理」（2012年度春学期）・第1部を参照してください。

²伝達できなかった帯域を推定する方法はあり、超解像とよばれています。