

1. 関数 $f(x)$ のフーリエ変換を

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-i2\pi\nu x) dx \quad (1)$$

と表すことにします。 $f(x)$ が実関数とすると、

$$\begin{aligned} F(\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (\cos 2\pi\nu x - i \sin 2\pi\nu x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos 2\pi\nu x dx - i \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin 2\pi\nu x dx \end{aligned} \quad (2)$$

と表せるので、

$$\begin{aligned} F(-\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos 2\pi(-\nu)x dx - i \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin 2\pi(-\nu)x dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos 2\pi\nu x dx + i \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin 2\pi\nu x dx \end{aligned} \quad (3)$$

となります。すなわち、 $\Re F(\nu) = \Re F(-\nu)$ 、 $\Im F(\nu) = -\Im F(-\nu)$ となります (\Re , \Im は、それぞれ実部、虚部を表します)。つまり、実部は偶関数、虚部は奇関数となります。

このことは、実関数をフーリエ変換すると、周波数の実部・虚部とも正の部分の値だけが決めれば、他の値はすべて決まってしまうことを示しています。したがって、定義域が実数から複素数になっても、情報の量がふえているわけではありません。

2. 講義第4回のプリントの3ページ「拡大・縮小」のとおりです。
3. 講義第5回のプリントの2ページにある通り $FT[1] = \delta(\nu)$ ですから、フーリエ変換の線形性 (第4回プリントの(8)式) から $FT[a] = a\delta(\nu)$ となります。