2012 年度秋学期　解析応用　第８回演習の解答例

1. $A_1=\Omega, A_i=\emptyset\ (i=2,3,\dots)$ とすると，$\Omega=A_1\cup A_2\cup\emptyset\cup\dots$ で，確率測度の定義の条件 3 より $P(A_1\cup A_2\cup\dots)=P(\Omega)+\sum_{i=2}^{\infty}P(\emptyset)$ です。よって $\sum_{i=2}^{\infty}P(\emptyset)=0$ で，$P(\cdot)\geqq 0$ だから $P(\emptyset)=0$ となります。

2. $A_1=A, A_2=B, A_i=\emptyset\ (i=3,4,\dots)$ とすると，同様に条件 3 より $P(A\cup B\cup\emptyset\cup\dots)=P(A)+P(B)+\sum_{i=3}^{\infty}P(\emptyset)$ で，$P(\emptyset)=0$ ですから証明されました。

3. $A\cap A^c=\emptyset$ なので，$B=A^c$ とおけば上の式にあてはめられ，$P(A\cup A^c)=P(A)+P(A^c)$ となります。$A\cup A^c=\Omega$ で $P(\Omega)=1$ ですから，証明されました。

4. $A\subset B$ のとき $B=A\cup(B-A)$ です。$A\cup(B-A)=\emptyset$ なので, 上の式から $P(B)=P(A)+P(B-A)$ となり，$P(\cdot)\geqq 0$ だから $P(A)\leqq P(B)$ となります。

5. $A\cup B=A\cup(B-A)$ で, $A\cap(B-A)=\emptyset$ なので, この問題の２番から $P(A\cup B)=P(A\cup(B-A))=P(A)+P(B-A)$ です。一方，$B=(B-A)\cup(A\cap B)$ で，$(B-A)\cap(A\cap B)=\emptyset$ なので，同様に $P(B)=P(B-A)+P(A\cap B)$ です。この両式を辺々引き算すると，$P(A\cup B)-P(B)=P(A)-P(A\cap B)$ となり，証明されました。