

2012 年度秋学期 解析応用 第9回演習の解答例

任意の a について、ヒントのとおり

$$\{\omega|X(\omega) < a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \omega|X(\omega) \leq a - \frac{1}{n} \right\} \quad (\text{A1})$$

です。そこで、 X が確率変数である、すなわち任意の b について

$$\{\omega|X(\omega) \leq b\} \in \mathcal{F} \quad (\text{A2})$$

であるならば、 \mathcal{F} が σ -集合族であることの定義の 3, すなわち $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ より、任意の a について $\{\omega|X(\omega) < a\} \in \mathcal{F}$ です。

逆もほぼ同様に、任意の a について $\{\omega|X(\omega) < a\} \in \mathcal{F}$ とすると、 $\{\omega|X(\omega) < a - \frac{1}{n}\} \in \mathcal{F}$ もなりたちます。さらに、

$$\{\omega|X(\omega) \leq a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \omega|X(\omega) < a - \frac{1}{n} \right\} \quad (\text{A3})$$

がなりたち、これは \mathcal{F} の要素ですから、上と同様に $\{\omega|X(\omega) \leq a\} \in \mathcal{F}$ であり、これは X が確率変数であることを示しています。■