2012 年度秋学期　解析応用　第１５回演習の解答例

1.
9 回の測定結果は，正規分布にしたがう母集団からの 9 個の標本と考えることができます。そこで標本平均を $\bar{X}$，不偏分散を s^2 とするとき，

$$\begin{aligned}
\bar{X} &= \frac{1}{9}(100.0+100.1+101.0+99.3+97.8+100.2+98.5+100.1+101.0) = 99.78 \\
s^2 &= \frac{1}{9-1}((100.0-99.78)^2+(100.1-99.78)^2+(101.0-99.78)^2+ \\
&\quad (99.3-99.78)^2+(97.8-99.78)^2+(100.2-99.78)^2+ \\
&\quad (98.5-99.78)^2+(100.1-99.78)^2+(101.0-99.78)^2) = 1.149 \qquad \text{(A1)}
\end{aligned}$$

となります。標本サイズ $n(=9)$ とし，真の沸点を μ とすると，t 統計量

$$t = \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{s^2/n}} \qquad \text{(A2)}$$

は自由度 $n-1$ の t 分布にしたがいます。

$t_{0.025}(n-1)$ を「自由度 $n-1$ の t 分布において，t 統計量が $t_{0.025}(n-1)$ 以上である確率が 0.025 になるような t の値（2.5%点）」とすると，

$$P\left(-t_{0.025}(n-1) \le \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{s^2/n}} \le t_{0.025}(n-1)\right) = 0.95 \qquad \text{(A3)}$$

となります。(A3) 式を μ についての不等式に書き換えて，問題の数値を代入すると，

$$P\left(99.78-0.357t_{0.025}(n-1) \le \mu \le 99.78+0.357t_{0.025}(n-1)\right) = 0.95 \qquad \text{(A4)}$$

となり，数表より $t_{0.025}(9-1) = 2.306$ ですから，μ の 95%信頼区間は 98.96 から 100.6（℃）となります。

2.
問題から，帰無仮説 $H_0 : \mu = 100$，対立仮説 $H_1 : \mu < 100$ の検定を行います。1. で述べた通り，

$$t = \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{s^2/n}} \qquad \text{(A5)}$$

は，自由度 $n-1$ の t 分布にしたがいます。

今回の問題では，「『μ は 100 では大きすぎるから』帰無仮説を棄却し，『本当は μ はもっと小さい』すなわち $\mu < 100$ という対立仮説を採択する」という推論に持ってゆきたいと考えます。

(A5) 式によると，μ が大きくなると，t は小さくなります。そこで，「t が，5%の確率でしか起きないくらいの，小さな値になるとき」帰無仮説が棄却されるように，棄却域を設定します。

t 分布の数表から，自由度 $n-1=8$ のとき，(A5) 式の t が $-t_{0.05}(8) = -1.860$ 以下である確率，すなわち $P(t \le -1.860)$ が 5%であることがわかります。ですから，問題文の数値，および帰無仮説 $\mu = 100$ を (A5) 式に入れて t を計算し，その値が -1.860 以下であれば帰無仮説を棄却します。計算すると $t = -0.616$ で，-1.860 以下でないので，帰無仮説は棄却されません。すなわち，「この水の沸点は 100 ℃より低い」とまでは言い切れません。