2012 年度春学期　応用数学（解析）　第３回

第１部・「無限」の理解／　実数とは何か

実数とは，整数，有理数，無理数をあわせたものです。整数は，ものを $1, 2, 3 \ldots$ と数える自然数（正の整数）と，0，それに，自然数にマイナスをつけた数（負の整数）を合わせたものです。有理数は，整数を分母分子とする分数で表される数[1]で，整数，有限小数，循環する無限小数のいずれかで表されます。一方，無理数とは，ごく大雑把にいうと，循環しない無限小数です。たとえば，$\sqrt{2} = 1.4142135\ldots$ や $\pi = 3.141592\ldots$ といった数は，代表的な「循環しない無限小数」です。ここでは，実数というものがどのように定義されるのかを見てゆきましょう。

閉区間・開区間

整数は数直線上のある点で表されますが，「循環しない無限小数」が何かひとつの点で表されるというのは，なかなか想像しにくいことです。そこで，実数を理解するのに用いられるのが「区間」です。直感的には「数直線上のある幅」ですが，数学では以下のように説明されます。

２つの数 a, b があり，$a < b$ であるとします。このとき，a と b の間にある数の集合を，区間といいます。両端を含む場合，すなわち $a \leq x \leq b$ であるような x の集合を閉区間といい，$[a, b]$ で表します。また，両端を含まない場合，すなわち $a < x < b$ であるような x の集合を開区間といい，(a, b) で表します。

閉区間 $[a, b]$ の場合は，区間の最小値は a，最大値は b となります。一方，開区間 (a, b) は，両端の数 a や b は含みません。したがって，最小値や最大値は，存在するとは限りません。これは，考えている数がどんな数かによります。

無限小数と Cantor の公理

上で，無理数の例として $\sqrt{2} = 1.4142135\ldots$ をあげました。このとき，$\ldots$ の部分は省略されており，どういう数かわからないわけですから，この書き方は $\sqrt{2}$ という無理数を近似的に表しているにすぎません。では，小数の桁数を無限に増やすと，本当にひとつの数を表すことができるのでしょうか？

この質問に対して「実数とはそうやって定まるのだ」と言っているのが，**Cantor（カントール）の公理**です。これは，「閉区間 $I_n = [a_n, b_n]$ があり，n が大きくなっていく時，I_n が I_{n-1} に含まれ，しかも区間の幅 $b_n - a_n$ が限りなく小さくなるとき，閉区間 I_n の極限はひとつの実数を表す」というものです。

上の $\sqrt{2}$ の例でいうと，$1.4142135\ldots$ という無限小数は，$[1, 2], [1.4, 1.5], [1.41, 1.42], [1.414, 1.415], \ldots$ という閉区間の列の極限を表しており，その極限がひとつの実数 $\sqrt{2}$ である，ということになります。この意味で，「無理数とは，大雑把にいえば，循環しない無限小数」と述べたわけです。

Dedekind の切断

実数を定義する別の方法としてよく知られているのが，**Dedekind（デデキント）の切断**というものです。これを用いると，無理数と有理数の根本的な違いを直感的に理解することができます。

数直線は，数を大きさの順に直線上に並べたものです。いま，数直線をあるところで切断し，数を大きい方と小さい方の２つの組に分けることを考えます。このような分け方は，「すべての数を，一方の組のどの数も，もう一方の組のどの数よりも小さくなるように，２つの組に分ける」ということができます。このように分けることを，Dedekind の切断といいます。

[1] 0 は分母になることはできません。

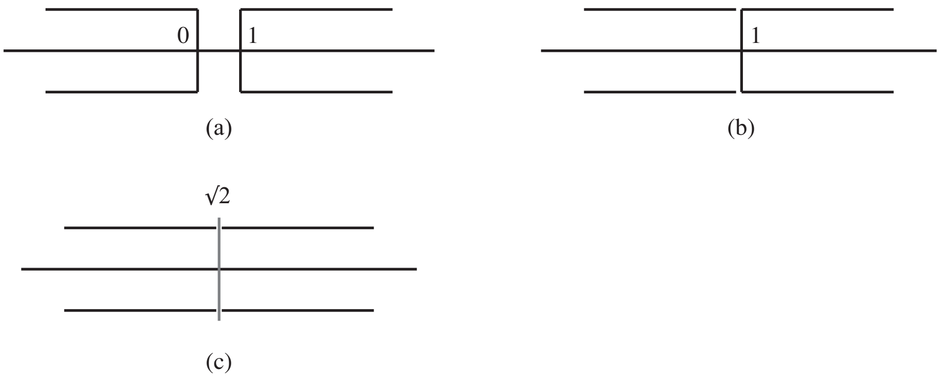

図 1: Dedekind の切断

ここでいう数直線上の数が，整数であるとしましょう。この場合，整数はとびとびに並んでいますから，図 1(a) のように，２つの組の間には隙間ができます。

では，数直線上の数が，有理数である場合はどうでしょうか。有理数には，「２つの異なる有理数の間には，必ず別の有理数がある」という，**稠密性**という性質があります。そこで，例えば上の組を「1 以上の有理数」としましょう。このとき，1 は上の組に入る一方，下の組は「1 よりも小さい有理数」となります。このとき，下の組には最大値はなく，「1 よりも小さく，1 に限りなく近い有理数」が無数にあります。すなわち，この切断は図 1(b) のようになります。

しかし，有理数を無理数で切断する，つまり上の組を「$\sqrt{2}$ 以上の有理数」とするときはどうでしょうか。このときは，$\sqrt{2}$ 自身は有理数ではありませんが，「$\sqrt{2}$ よりも小さく，$\sqrt{2}$ に限りなく近い有理数」も，「$\sqrt{2}$ よりも大きく，$\sqrt{2}$ に限りなく近い有理数」も，どちらも無数にあります。したがって，図 1(c) のように，有理数の場合には「上の組の最小値も，下の組の最大値もないが，２つの組の間には途切れ目がある」という切断が可能です。

さて，実数とは，このような切断を行うとき，切断の形がつねに図 1(b) の形になり，図 1(c) のような切断が起きないような数，とします。つまり，上の組を「ある数 a 以上の数」とすると，下の組は「a より小さい数」となり，下の組の最大値はありません。一方，下の組を「ある数 a 以下の数」とすると，上の組は「a より大きい数」となり，上の組の最小値はありません。いずれの場合でも，この切断が，実数 a を表すと考えます。つまり，実数とは，数直線上の点というよりも，「切り口」である，というわけです。また，実数の切断がこの形に限られることを，実数の**連続性**といいます。

上限・下限ー Weierstrass の定理

開区間には，最小値や最大値はありません。だからといって，区間は限りなく広がっているわけではなく，a や b という限界はあります。こういう限界を表すために，数学には**有界，上界・下界，上限・下限**という考え方があります。

ある区間に属するどの数も，ある数 M よりも小さいか等しい[2]とき，この区間は上に有界であるといい，M を上界といいます。同様に，ある区間に属するどの数も，ある数 N よりも大きいか等しいとき，この区間は下に有界であるといい，N を下界といいます。

上で述べた上界 M や下界 N は，ひとつには決まっていません。そこで，「上界のうち最小のもの」を

[2]数学の本では，ふつう「小さいか等しい」とは言わず，「大きくない」と言います。

上限 (supremum, sup),「下界のうち最大のもの」を下限 (infimum, inf) といいます。

実数については,「実数からなる集合が上（下）に有界であれば，必ず上限（下限）が存在する」という，**Weierstrass（ワイエルシュトラス）の定理**がなりたちます。この定理は，以下のように Dedekind の切断から導かれるので，こちらを実数を定める公理とすることもできます。

実数からなるある集合 S が下に有界とすると,「S の下界である数」は必ず「S の下界ではない数」よりも小さいですから，これらは切断を形成し，ひとつの実数 s を定めます。「Dedekind の切断」のところで述べたように，実数においては，s は,「S の下界である数」のうち最大の数か,「S の下界ではない数」のうち最小の数の どちらか一方 です。

もしも s が「S の下界ではない数」のうち最小の数であるとすると，s より小さな実数 t が S に属しているはず（それがなければ，s は「S の下界である数」になってしまう）で，さらに s と t の間の実数 u が存在します。u は S に属する実数 t よりも大きいので,「S の下界ではない数」のひとつです。ところが u は s よりも小さいので，これは「s が『S の下界ではない数』のうち最小の数」であることに矛盾しています。よって，s は「S の下界である数」のうち最大の数，すなわち S の下限です。上に有界な集合と上限の関係も同様です。■

また,「実数からなる集合が上（下）に有界であれば，必ず上限（下限）が存在する」という Weierstrass の定理から,「実数の有界な単調数列は収束する」という定理が導かれます。これについては，次回「収束」についてお話するときに，一緒に説明します。

Cantor の公理と Dedekind の切断

最初に述べた「Cantor の公理」から，Dedekind の切断による実数の定義を導くことができます。

実数を，切断によって集合 A, B に分けます。A からひとつの数 a_0，B からひとつの数 b_0 を選びます。このとき，$(a_0 + b_0)/2$ は A か B のどちらかに属しているはずです。そこで,

- A に属しているときは，$a_1 = (a_0 + b_0)/2, b_1 = b_0$
- B に属しているときは，$a_1 = a_0, b_1 = (a_0 + b_0)/2$

とすると，区間 $[a_1, b_1]$ はやはり集合 A, B にまたがっており，区間の幅は半分になりました。これを繰り返して $[a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n], \ldots$ を作っていくと，区間の幅が狭まっていき，Cantor の公理によりひとつの実数 s を定めます。

この実数 s が A の最大数でかつ B に最小数がないか，あるいは s が B の最小数でかつ A に最大数がないならば，Dedekind の切断による実数の定義が導かれたことになります。そこで，s が A に属するとしましょう。s より大きな数 t を考えると，ある区間の右端 b_k が s と t の間に入るはずですから，t は B に属しているはずです。つまり，s は A の最大数です。また，どんな t を選んでも，必ず上述の b_k が存在し，そのどちらも B に属するので，B には最小数は存在しません。s が B に属する場合も同様です。■

ここでは述べませんが「実数の有界な単調数列は収束する」という定理から「Cantor の公理」を導くこともできます。つまり，公理・定義・定理などいろいろな名前がついていますが，ここまでに述べた，実数を定義する 4 つの方法は，実は同等のものであるということになります。

連続性裁判

稠密だとか連続だとか，そんな細かいことに，実生活上の意味はあるのでしょうか？ 実は，つい最近このことに関連の深い裁判があったのです。

この裁判は，1953 年公開の映画の著作権にかかわるものです。以前は，映画の著作権は「公開の年から 50 年間有効」とされていましたが，2004 年 1 月 1 日施行の法律で「70 年間有効」に改められました。すると，1953 年公開の映画の著作権は，50 年後の 2003 年 12 月 31 日 24 時で消滅し，2004 年 1 月 1 日 0 時から施行の新法には間に合わなかったのでしょうか？ それとも，2003 年 12 月 31 日 24 時と 2004 年 1 月 1 日 0 時は同じ時刻だから，新法にしたがって 2023 年まで著作権が有効なのでしょうか？ このことが，裁判で争われました。1953 年公開の映画には，「シェーン」や「ローマの休日」などの名画が含まれるため，大きな話題となったのです。

判決は，「2003 年 12 月 31 日と 2004 年 1 月 1 日は別の日だから，2003 年 12 月 31 日 24 時と 2004 年 1 月 1 日 0 時は別の時刻で，著作権は消滅」というものでした。これを Dedekind の切断で考えてみると，「時間の流れを，ある時刻で切断して 2 つに分けると，その時刻は前後のどちらか一方だけに含まれる」と考えた，ということになります。つまり，「時の流れは連続」だということになります。

問題

相異なる 2 つの有理数の間には必ず無理数があることを証明してください。
（ヒント：2 つの有理数 $a, b (a < b)$ の間には有理数しかないと仮定し，無理数 m について $\dfrac{m-a}{b-a}$ を挟む整数 $n-1$ と n が存在することから矛盾を導く）

参考文献

瀬山士郎，「無限と連続」の数学，東京図書，ISBN978-4-489-00708-8.（高校数学からの橋渡しを意図しており，大変親切な本です。）