

振動は、「ある方向に進めば進むほど、逆向きに進もうとする力が働く」ことによって、釣り合い位置から両方に交互に進む動作を繰り返す現象です。ニュートンの運動方程式によれば、質点<sup>1</sup>の運動は、質点の位置を  $x$ 、質量を  $m$ 、時刻を  $t$ 、働く力を  $F$  とすると、加速度が位置の 2 階微分で表されることから

$$F = m \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (1)$$

という微分方程式で表されます。そこで、この方程式で力  $F$  がどう表されるかによって、さまざまな振動を分析することができます。

### 単振動

質点が釣り合い位置から変位したとき、釣り合い位置に戻ろうとする力を**復元力**といいます。釣り合い位置を原点とするとき、釣り合い位置からの距離に比例する復元力が働くとする、復元力  $F$  は  $F = -kx$  と表すことができます ( $k$  は正の定数)。釣り合い位置からの方向と逆向きの力が働くので、マイナスがついています。

このとき、運動方程式は

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \quad (2)$$

となり、 $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  とすると

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \quad (3)$$

となります。

この方程式は斉次形の 2 階線形微分方程式で、第 7 回で説明した方法で解くことができます。特性方程式は  $\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$  で、特性方程式は 2 つの虚数解  $\lambda = \pm i\omega_0$  をもちます。よって、一般解は  $C_1, C_2$  を定数として

$$x = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) \quad (4)$$

と表されます。位置  $x$  は実数ですから、 $C_1, C_2$  はどちらも実数でなければなりません。また、三角関数を合成すると、 $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ 、 $\phi = -\tan^{-1}(C_2/C_1)$  として

$$x = A \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (5)$$

と表されます。

つまり、質点は  $x$  軸上で  $[-A, A]$  の範囲を往復する振動をすることになります。この運動を**単振動**といいます。時間  $t$  を秒の単位で測るとき、 $\omega_0$  はコサインの引数になっている角度が 1 秒間に何ラジアン進むかを表し、**角振動数**とよばれます。また、1 往復に必要な時間は、角度が  $2\pi$  ラジアン進むのに必要な時間ですから  $2\pi/\omega_0$  で、これを**周期**といいます。さらに、1 秒間に往復する回数は、周期の逆数すなわち  $\omega_0/2\pi$  で、これを**振動数**といいます。 $A$  は**振幅**といいます。

<sup>1</sup>質量はあるが大きさはないという、力学上の概念として考えられた、理想的な物体。

## 減衰振動

前節では、質点は復元力以外の力を受けないと考えましたが、それ以外に、質点の運動が速ければ速いほど、それをより妨げようとする力が働く場合を考えます。この力は**抵抗力**とよばれ、空気抵抗などがこれにあたります。

質点の速度は  $\frac{dx}{dt}$  で表されますから、抵抗力は  $a$  を正の定数として  $-a\frac{dx}{dt}$  で表されます。よって、運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - a\frac{dx}{dt} \quad (6)$$

となります。ここで、 $\mu = \frac{a}{2m}$  とおきます。 $\mu$  は抵抗係数とよばれる定数です。さらに前節の  $\omega_0$  も用いると、

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\mu\frac{dx}{dt} + \omega_0^2x = 0 \quad (7)$$

となります。

この方程式も前節と同じく齊次形の2階線形微分方程式です。特性方程式は  $\lambda^2 + 2\mu\lambda + \omega_0^2 = 0$  で、その解は  $\lambda = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2}$  です。

ここで、 $\mu^2 < \omega_0^2$  の場合を考えます。これは、抵抗係数が小さく、抵抗力が比較的小さい場合にあたります。この場合、特性方程式は虚数解をもつことになるので、微分方程式の一般解は  $C_1, C_2$  を定数として

$$x = e^{-\mu t}(C_1 \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}t) + C_2 \sin(\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}t)) \quad (8)$$

となり、前節と同様に三角関数を合成して定数をおきかえると、 $A$  を定数として

$$x = Ae^{-\lambda t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}t + \phi) \quad (9)$$

となります。

この運動は、前節の単振動と比べると、振幅が一定値  $A$  ではなく  $Ae^{-\lambda t}$  となっており、時間が進むにつれて小さくなっていきます。この運動を**減衰振動**といいます。

## 強制振動

振動する質点に、さらに外部から力が働いておきる振動を**強制振動**といい、外部からの力を**強制力**といいます。

ここでは、強制力が  $F \cos \omega t$  である場合を考えます。これは、質点を強制的に角振動数  $\omega$  で振動させることに相当します。復元力と強制力を合わせると  $-kx + F \cos \omega t$  なので、運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + F \cos \omega t \quad (10)$$

となります。  $f = \frac{F}{m}$  とおき、さらに前々節の  $\omega_0$  を用いると、この方程式は

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = f \cos \omega t \quad (11)$$

と表されます。この方程式は非斉次形2階線形微分方程式で、対応する斉次形の方程式は前々節の(3)式と同じですから、その一般解は  $x = A \cos(\omega_0 t + \phi)$  です。

一方、非斉次形の方程式の特殊解を求めるため、 $x = C \cos \omega t$  とおいて(11)式に代入すると

$$\begin{aligned} -C\omega^2 \cos \omega t + \omega_0^2 C \cos \omega t &= f \cos \omega t \\ C(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \omega t &= f \cos \omega t \end{aligned} \quad (12)$$

となります。

$\omega \neq \omega_0$  のとき、 $C = \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2}$  です。よって、(11)式 of 非斉次形方程式の一般解は

$$x = A \cos(\omega_0 t + \phi) + \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t \quad (13)$$

となります。

この解の第1項は、強制力がない時の振動で**固有振動**といい、 $\frac{\omega_0}{2\pi}$  を**固有振動数**といいます。一方、第2項は強制振動を表す項です。この項は、強制振動の角振動数  $\omega$  が  $\omega_0$  に近づくと、どんどん大きくなります。 $\omega = \omega_0$  のときは、第2項の分母が0になるので、この形では解くことができません。この場合は、特殊解を  $x = t(C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t)$  とおいて(11)式に代入すると、

$$\begin{aligned} (-2C_1\omega_0 - tC_2\omega_0^2) \sin \omega_0 t + (2C_2\omega_0 - tC_1\omega_0^2) \cos \omega_0 t + t\omega_0^2 (C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t) &= f \cos \omega_0 t \\ -2C_1\omega_0 \sin \omega_0 t + 2C_2\omega_0 \cos \omega_0 t &= f \cos \omega_0 t \end{aligned} \quad (14)$$

となりますから、 $C_1 = 0, C_2 = \frac{f}{2\omega_0}$  となります。すなわち、(11)式の一般解は

$$x = A \cos(\omega_0 t + \phi) + \frac{ft}{2\omega_0} \sin \omega_0 t \quad (15)$$

となります。この解は、 $t$  が大きくなる、すなわち時間がたつにつれ、第2項が振動しながら発散します。この現象を**共鳴**といい、ときには建造物を破壊するほどの事態をひきおこすことがあります。

---

## 問題

単振動において、 $t = 0$  のとき  $x = 0, \frac{dx}{dt} = v$  のとき、運動方程式の特殊解を求めてください。

## 参考文献

後藤憲一、力学、学術図書、1999。ISBN978-4873-61040-5