2012 年度春学期　画像情報処理

補助プリント：「行列」に慣れていない人のために

ベクトルと行列の計算

第６回の主プリントの (1) 式では，「２画素画像」のもとの画素値 x_1, x_2 から変換後の画素値 z が

$$z = a_1 x_1 + a_2 x_2 \tag{A1}$$

求められる，としました。これを，「ベクトル」の書き方では，次のように書きます。

$$z = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{A2}$$

右辺の左側の () を**行ベクトル**，右側の () を**列ベクトル**といいます。このように数字を () に入れて並べるだけで，上の (A1) 式の計算をしたことになります。

主プリントでは，上の (A1) 式の解となる z, a_1, a_2 は２組あると述べています。そこで，それぞれの組を添字 (1) と (2) で区別すると，それぞれを求める計算は

$$\begin{aligned} z_{(1)} &= \begin{pmatrix} a_{(1)1} & a_{(1)2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ z_{(2)} &= \begin{pmatrix} a_{(2)1} & a_{(2)2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{A3}$$

となります。この２つの式をひとつにまとめて，次のように書きます。

$$\begin{pmatrix} z_{(1)} \\ z_{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{(1)1} & a_{(1)2} \\ a_{(2)1} & a_{(2)2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{A4}$$

この式の右辺にある，数の４つ入った () を**行列**といい，右辺の計算を「行列とベクトルのかけ算」といいます。行ベクトルが列になって並んでいるので，行列とよぶわけです。

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ を座標平面でのある点と考えると，この計算は，$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ という点を $\begin{pmatrix} z_{(1)} \\ z_{(2)} \end{pmatrix}$ という点に移動する計算を表す，ということもできます。このとき，ベクトルという言葉を使うと，$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ は原点から点 (x_1, x_2) をさすベクトル（位置ベクトル）であるといいます。図形的には，原点から点 (x_1, x_2) まで伸びた矢印を想像すればよいでしょう。この言い方をすると，行列とベクトルのかけ算は，ベクトルをベクトルに変換する計算ということができます（図 A1）。

行列と行列の計算

一方，z, a_1, a_2 を求める計算として

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \tag{A5}$$

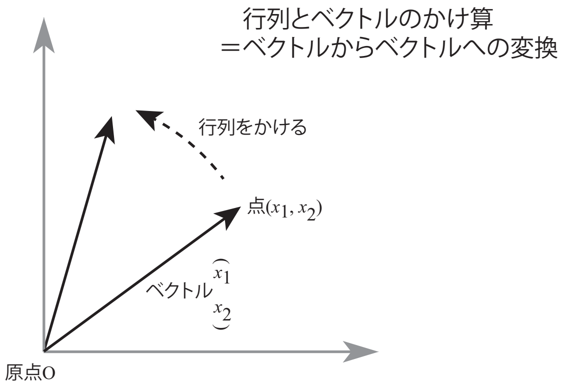

図 A1: 行列とベクトルのかけ算.

という式（主プリントの (9) 式）が出てきました。ここで，右辺の λ は普通の数（スカラー）で，このとき右辺は $\begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \end{pmatrix}$ を表します。

上で述べたように，解となる a_1, a_2 は２組あるので，λ もそれぞれに対応して２つあります。それらを $\lambda_{(1)}, \lambda_{(2)}$ と表すと，それぞれに対応する式は

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{(1)1} \\ a_{(1)2} \end{pmatrix} = \lambda_{(1)} \begin{pmatrix} a_{(1)1} \\ a_{(1)2} \end{pmatrix} \tag{A6}$$

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{(2)1} \\ a_{(2)2} \end{pmatrix} = \lambda_{(2)} \begin{pmatrix} a_{(2)1} \\ a_{(2)2} \end{pmatrix} \tag{A7}$$

と表されます。

今度は，これらの２つの式をひとつにまとめて表します。列ベクトル $\begin{pmatrix} a_{(1)1} \\ a_{(1)2} \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} a_{(2)1} \\ a_{(2)2} \end{pmatrix}$ を左右にくっつけて，$\begin{pmatrix} a_{(1)1} & a_{(2)1} \\ a_{(1)2} & a_{(2)2} \end{pmatrix}$ と，ひとつの行列で表します。すると，(A6), (A7) の２つの式は，まとめて

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{(1)1} & a_{(2)1} \\ a_{(1)2} & a_{(2)2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{(1)1} & a_{(2)1} \\ a_{(1)2} & a_{(2)2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{(1)} & 0 \\ 0 & \lambda_{(2)} \end{pmatrix} \tag{A8}$$

と表すことができます。この式の両辺は,「行列と行列のかけ算」になっています。

(A8) 式の左辺は，上で述べたとおり，$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} a_{(1)1} \\ a_{(1)2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{(2)1} \\ a_{(2)2} \end{pmatrix} \right)$ のように列ベクトルを左右にくっつけたものです。

一方 (A8) 式の右辺は，右側の行列を列ベクトルに分けて $\begin{pmatrix} a_{(1)1} & a_{(2)1} \\ a_{(1)2} & a_{(2)2} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} \lambda_{(1)} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_{(2)} \end{pmatrix} \right)$ と表すと, 左側の行列 $\begin{pmatrix} a_{(1)1} & a_{(2)1} \\ a_{(1)2} & a_{(2)2} \end{pmatrix}$ と右側の行列の左側の列ベクトル $\begin{pmatrix} \lambda_{(1)} \\ 0 \end{pmatrix}$ の積は $\begin{pmatrix} \lambda_{(1)} a_{(1)1} + 0 \cdot a_{(2)1} \\ \lambda_{(1)} a_{(1)2} + 0 \cdot a_{(2)2} \end{pmatrix}$

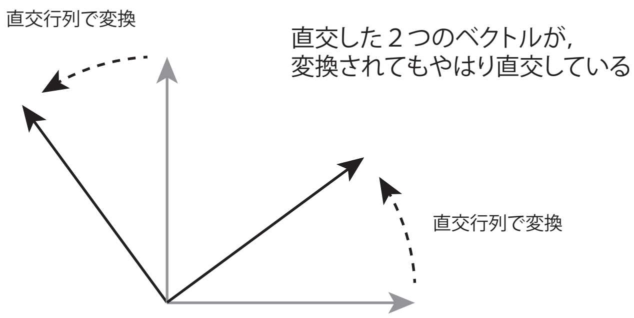

図 A2: 直交行列によるベクトルの変換.

となり，すなわち $\lambda_{(1)}\begin{pmatrix} a_{(1)1} \\ a_{(1)2} \end{pmatrix}$ となります。右側の列ベクトルについても同様です。このように，（行列×列ベクトル）のかけ算を２つ同時に行うのが，行列のかけ算です。

(A7) 式を２変数でなく p 変数にしたものが主プリントの (14) 式で，(A8) 式を p 変数にしたものが主プリントの (17) 式です。主プリントの (17) 式は，記号が多くて大変複雑です。また，p 変数の場合は，ベクトルも p 次元空間での「矢印」になり，２変数の場合のように図形的に考えることもできません。

そこで，主プリントでは (18)(19) 式のように１つの行列を１つの記号に置き換えてしまい，(20) 式のように表しています。このように，複雑な計算をあたかも数の計算のように表して，単純な形で理解しようというのが，行列というものが考えられた理由です。

なお，行列のかけ算では，積 AB と積 BA は同じとは限りません。すなわち，数のかけ算とは違って，かける順番が問題になります。

転置行列，対称行列，直交行列

転置行列とは，ある行列の行と列を入れ替えたもので，例えば行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の転置行列は $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ です。行列 A の転置行列を，${}^tA, A^t, A^T, A'$ などと表します。主プリントでは最後の A' を使っていますが，これは統計学の教科書に多い方式です。さらに，ある行列とその転置行列が同じとき，その行列を**対称行列**といいます。

一方，ある行列に含まれる各列ベクトルが互いに直交しているとき，この行列を**直交行列**といいます。もともと直交している２つのベクトルを直交行列で変換すると，それぞれを変換したベクトルもやはり直交しています。図形的には，直交座標の座標軸を直交行列で変換する計算は，座標軸を直交したまま回転する計算にあたります（図 A2)。

逆行列

さきほど「行列と行列のかけ算」を説明しましたが，行列には「割り算」はありません。そのかわりにあるのが**逆行列**です。

行列の A の逆行列 A^{-1} は，$AA^{-1} = A^{-1}A = I$ となる行列のことです。ここで，I は「単位行列」といい，どんな行列 X に対しても $XI = IX = X$ となる行列のことです。つまり「かけても何もおこらない行列」で，数のかけ算でいえば “1”（単位元）にあたります。単位行列の中身は，左上から右下に向か

う対角線上の数（対角成分）がすべて 1，他はすべて 0 になります。例えば $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は単位行列です。

このことから，行列の積 XA に右から A^{-1} をかけると $XAA^{-1} = X$ となり，あたかも「A で割った」のと同じような計算ができます。なお，行列 A が直交行列のときは，その逆行列 A^{-1} は転置行列 A' と同じであることが知られています。