

2013 年度秋学期 解析応用 第 13 回演習の解答例

1. $f_X(x), f_Y(y)$ をそれぞれ X, Y の周辺確率密度関数, $f_{XY}(x, y)$ を X, Y の同時確率密度関数とすると, X, Y は独立ですから, $f_{XY}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$ です。よって

$$\begin{aligned} E(XY) &= \iint_{x,y} xy f_{XY}(x, y) dx dy \\ &= \iint_{x,y} xy f_X(x) f_Y(y) dx dy \\ &= \int_x x f_X(x) dx \int_y y f_Y(y) dy \\ &= \int_x x f_X(x) dx \int_y y f_Y(y) dy \\ &= E(X)E(Y) \end{aligned} \tag{A1}$$

なお, $\iint_{x,y}$ は x, y の両方について $-\infty$ から ∞ まで積分すること, $\int_x (\int_y)$ は x (y) について $-\infty$ から ∞ まで積分することを意味します。

2. 以下のとおりです。

$$\begin{aligned} M_{X+Y}(t) &= E[e^{t(X+Y)}] = E[e^{tX} e^{tY}] = \iint_{x,y} e^{tx} e^{ty} f_{XY}(x, y) dx dy \\ &= \iint_{x,y} e^{tx} e^{ty} f_X(x) f_Y(y) dx dy \\ &= \int_x e^{tx} f_X(x) dx \int_y e^{ty} f_Y(y) dy \\ &= E[e^{tX}] E[e^{tY}] = M_X(t) M_Y(t) \end{aligned} \tag{A2}$$