

検出力と尤度比検定

統計学における区間推定や仮説検定については、これまでに「基礎数学 (確率・統計)」や「統計学」を受講した人は学んだことがあると思います。今日は、仮説検定の考え方の簡単な説明と、仮説検定の誤りの確率と「検出力」について、さらに仮説検定の根拠となる考え方のひとつである「尤度比検定」を説明します。

仮説検定の考え方

「背理法」という論証の方法があります。それは、次のような考え方になっています。

「論証したい事柄を否定する仮定を行う」
↓
「仮定から導かれた事柄に、矛盾があることを示す」
↓
「仮定が間違っていると結論する」

仮説検定は、これと同じような論証を、母集団についての仮定を使って行います。それは、次のような考え方になります。

「母集団について述べたい事柄を否定する仮定 (仮説) を行う」
↓
「『仮定が正しい』としたとき、ある統計量の値が『現在観察されている標本から得られる確率が非常に小さい』範囲に入っていることを示す」
↓
「仮定が間違っていると**考えたほうがよい**、と結論する」

このように、背理法では

「仮定をする」→「仮定から導かれる事柄は、**絶対に起こりえない**」

という考え方で論証しますが、仮説検定では

「仮定をする」→「仮定から導かれる値は、**得られる可能性がほとんどない**」

という考え方をします。したがって、仮説検定によって得られる判断は「必ず正しい」わけではなく、「正しい可能性が大きい」というだけものです。そこで、仮説検定では「仮説が間違っている」「仮説を否定する」とは言わず、「仮説を**棄却する**」といいます。また、このような判断の対象になる仮説を、**帰無仮説**といいます。

検出力

上で述べたように、仮説検定による判断には常に「判断が間違っている」危険性があります。「判断が間違っている」確率をゼロにすることはできませんが、なるべく小さくする必要があります。

この「判断の間違い」には、2種類の違いがあります。1つは、「**仮説が本当は正しいのに、仮説を棄却してしまう**」という間違いで、「**第1種の誤り**」といいます。もう1つは「**仮説が本当は間違っているのに、仮説を棄却しない**」という間違いで、「**第2種の誤り**」といいます。刑事裁判にたとえていえば、「被告人は無実」という仮説に対して「被告人が本当に無実なのに、『有罪』の判決を出してしまう」というのが第1種の誤りで、「被告人が本当は犯人なのに、『無罪』の判決を出してしまう」のが第2種の誤りです。

この2種類の誤りを犯す確率を、両方とも同時に一定限度よりも小さくすることは、一般にはできません。そこで、統計学ではふつう

「第1種の誤りを犯す確率 α がある一定の（小さな）値であることを保証したうえで、第2種の誤りを犯す確率 β をできるだけ小さくする」のが「よい」検定である¹

という原理を採用します。上の刑事裁判の例で言えば、「無実の人を有罪にしてしまう危険を厳しく制限したうえで、真犯人を無罪にしてしまう危険をできるかぎり小さくする」という考え方です。

このことは、第1種の誤りのほうが第2種の誤りよりも「重大な」誤りである、と考えていることを意味します。最初の背理法との対比を見ればわかるように、仮説検定では、仮説を棄却することによって（思うような）結論が得られたと判断し、その結果何か行動を起こす、という考えをとっています。したがって、「誤った根拠にしたがって行動を起こす」ことは、「判断を誤った結果、行動を起こさない」ことよりも重大な失敗だといえます。

α を**有意水準**といい、0.05(5%) という値がもっともよく用いられます。より厳密な検定では0.01(1%) を用いることもあります。また、母数の真の値を θ とするときの、第2種の誤りを犯す確率を $\beta(\theta)$ とすると、 $P(\theta) = 1 - \beta(\theta)$ は「母数の真の値を θ とするとき仮説を棄却する確率」で、**検出力**（または**検定力**）といいます。検出力は θ の関数ですから、その意味で**検出力関数**（または**検定力関数**）という言い方をすることもあります。つまり、「よい検定」とは、有意水準を一定の値とするとき、検出力関数をより大きくする検定であるということになります。

尤度比検定

具体的に検定のやり方を求める方法のひとつとして、ここでは**尤度比検定**という方法を説明します。ある母数 θ がある値をとっているとき、その母集団から取り出した標本 X の値が x である確率（確率密度）を $f(x; \theta)$ とします。このとき、サイズ n の標本の値が $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n$ であったとすると、尤度関数は

$$L(\theta) = f(x_1; \theta) \cdot f(x_2; \theta) \cdot \dots \cdot f(x_n; \theta) \quad (1)$$

となります。各標本は独立ですから、尤度関数は、標本の値が x_1, x_2, \dots, x_n となる確率（確率密度）を各々の θ について求めたものになります。

¹ α と β のことを、俗に「『あわて者の誤り』の α 、『ぼんやり者の誤り』の β 」といいます。

ここで、尤度関数を、標本を表す確率変数 X と母数 θ の関数 $L(X, \theta)$ と考えます。さらに、 $\theta = \hat{\theta}$ を、 $L(X, \theta)$ を最大にする θ 、すなわち θ の最尤推定値とし、尤度の最大値を $L(X, \hat{\theta})$ とします。

さて、母集団に対してある帰無仮説をたてます。そして、その仮説が正しいとしたときの θ の最尤推定値を $\hat{\theta}'$ とし、そのときの尤度関数の値（つまり、仮説が正しいとしたときの尤度の最大値）を $L(X, \hat{\theta}')$ とします。ここで、 $L(X, \hat{\theta})$ のほうは、 L の可能な最大の値ですから、 $L(X, \hat{\theta}')$ は $L(X, \hat{\theta})$ を上回ることはありません。

では、これらの2つの尤度の比、すなわち

$$\lambda = \frac{L(X, \hat{\theta}')}{L(X, \hat{\theta})} \quad (2)$$

が非常に小さい、すなわち「 $L(X, \hat{\theta}')$ が $L(X, \hat{\theta})$ に比べて極めて小さい」とき、これは何を意味するのでしょうか？

それは、「帰無仮説が正しいとすると、今得られているような標本が得られる確率（確率密度）は、帰無仮説を考えないときに比べて極めて小さい」ということです。

しかし、その標本は現に得られています。ということは、帰無仮説が正しいとすると、「今起きていることは、極めて珍しい事態である」と考えざるを得なくなります。このことから、「そんな無理のある考えをとるよりも、帰無仮説は間違っていると考える、すなわち仮説を棄却するほうが妥当である」と結論します。これが尤度比検定の考え方です。

では、 λ が「どのくらい」小さかったら、仮説を棄却すればよいのでしょうか？ それは、「 λ が λ_0 以下である確率が α 」であるような λ_0 を選んで、 λ が λ_0 以下であるとき、仮説を棄却するということにします。こうすると、帰無仮説が正しいとき、 $0 \leq \lambda \leq \lambda_0$ である確率が α です。つまり、帰無仮説が正しいのに間違えて棄却してしまう確率が、 α ということになります。この、 $0 \leq \lambda \leq \lambda_0$ という区間を**棄却域**といいます。

具体的な例で、尤度比検定がどのように使われるかを見てみましょう。いま、母集団は母分散が σ^2 の正規分布にしたがうとします。このとき、「母平均 $\mu = \mu_0$ である」という帰無仮説 $H_0: \mu = \mu_0$ に対する検定を行います。この母集団において、標本のひとつの値が x となる確率密度は

$$f(x, \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right\} \quad (3)$$

となります。さて、現実には得られた標本を x_1, x_2, \dots, x_n とすると、尤度関数 $L(X, \mu)$ は

$$L(X, \mu) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \mu) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^n \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)^2 \right\} \quad (4)$$

となります。

まず、帰無仮説 H_0 を仮定しないときの、 μ の最尤推定量を求めてみましょう。以前説明したとおり、 $\log L(X, \mu)$ が最大になる μ の値を求めるため、 $\log L(X, \mu)$ を μ で微分して0とおき、 μ の最尤推定量

$\hat{\mu}$ を求めます。

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \mu} \log L(X, \mu) &= \frac{\partial}{\partial \mu} \log \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^n \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)^2 \right\} \right] \\
 &= \frac{\partial}{\partial \mu} \left[\log \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^n + \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \right\} \right] \\
 &= -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n 2(x_i - \mu) \cdot (-1) \\
 &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)
 \end{aligned} \tag{5}$$

となり、これを0に等しいとおいて解くと、 $\hat{\mu} = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)/n$ 、すなわち標本平均 \bar{X} となります。したがって、 $L(X, \hat{\mu})$ は

$$L(X, \hat{\mu}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^n \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \bar{X}}{\sigma} \right)^2 \right\} \tag{6}$$

となります。

一方、帰無仮説 H_0 が正しいときは、帰無仮説で $\mu = \mu_0$ と決めたわけですから、推定するまでもなく、 $\hat{\mu}' = \mu_0$ です。よって $L(X, \hat{\mu}')$ は

$$L(X, \hat{\mu}') = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^n \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \mu_0}{\sigma} \right)^2 \right\} \tag{7}$$

となりますから、これらから尤度比 λ を求めると

$$\begin{aligned}
 \lambda &= \frac{L(X, \hat{\mu}')}{L(X, \hat{\mu})} \\
 &= \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^n \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \mu_0}{\sigma} \right)^2 \right\}}{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^n \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \bar{X}}{\sigma} \right)^2 \right\}} \\
 &= \exp \left[\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \mu_0}{\sigma} \right)^2 \right\} - \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \bar{X}}{\sigma} \right)^2 \right\} \right] \\
 &= \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \left\{ \sum_{i=1}^n (2(\bar{X} - \mu_0)x_i - (\bar{X}^2 - \mu_0^2)) \right\} \right] \\
 &= \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \{ 2(\bar{X} - \mu_0)n\bar{X} - (\bar{X}^2 - \mu_0^2) \} \right] \\
 &= \exp \left[-\frac{n}{2\sigma^2} (\bar{X} - \mu_0)^2 \right]
 \end{aligned} \tag{8}$$

となります。ここで n と μ_0 、 σ^2 はすでに定まった数ですから、(8)式は、 λ と \bar{X} の関係を表しています。上述のように、棄却域を $0 \leq \lambda \leq \lambda_0$ とすると、この式から、それに対応する \bar{X} の区間は、図1の矢印(1)(2)に示される範囲になります。よって、 \bar{X} がこの範囲に入る確率が、有意水準 α になるようにすれば、その有意水準に対応する棄却域が求められます。(8)式の確率密度関数のグラフは左右対称ですから、 \bar{X} が矢印(1)の範囲に入る確率が、 $\alpha/2$ になるようにすればよいことになります。

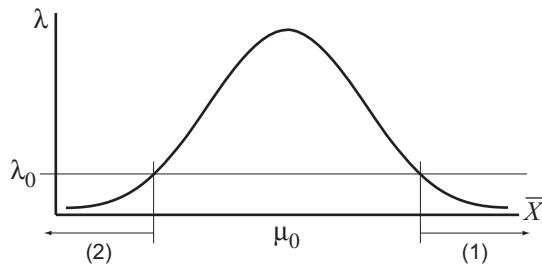


図 1: 棄却域

具体的に \bar{X} の区間を求めるため、(8) 式を

$$\lambda' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right)^2 \right] \quad (9)$$

と変形すると、 λ' は、標準正規分布の確率密度関数になっています。したがって、

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \quad (10)$$

とおくと、 Z は標準正規分布にしたがうことがわかります。そこで、例えば $\alpha/2 = 0.025$ とします。「 Z が $z_{0.025}$ 以上である確率が 0.025」となるような値 (上側 2.5 パーセント点) $z_{0.025}$ を考えると、この値は、数表から 1.96 となります。すなわち、「 \bar{X} が矢印 (1) の範囲に入る確率が 0.025」であるとき、「(10) 式の Z が 1.96 以上になる確率が 0.025」ということになります。したがって、「 Z が 1.96 以上または -1.96 以下のとき、帰無仮説 H_0 を棄却する」というのが、尤度比検定の考え方によって導かれる検定のやりかたになります。

仮説検定と区間推定

上の結論は、「 Z が 1.96 以上または -1.96 以下となる確率は 5%」(だから、そのときは帰無仮説 H_0 を棄却する) ということから、裏を返せば「 $-1.96 \leq Z \leq 1.96$ である確率は 95%である」、すなわち

$$P \left(-1.96 \leq \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq 1.96 \right) = 0.95 \quad (11)$$

であることを意味します。(11) 式から、「 μ_0 を含んでいる確率が 95%であるような区間」、つまり μ_0 の 95%信頼区間を導くことができます。すなわち、区間推定と検定とは、表裏一体にあることがわかります。