

1.

9 回の測定結果は、正規分布にしたがう母集団からの 9 個の標本と考えることができます。そこで標本平均を  $\bar{X}$ 、不偏分散を  $s^2$  とするとき、

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \frac{1}{9}(100.0 + 100.1 + 101.0 + 99.3 + 97.8 + 100.2 + 98.5 + 100.1 + 101.0) = 99.78 \\ s^2 &= \frac{1}{9-1}((100.0 - 99.78)^2 + (100.1 - 99.78)^2 + (101.0 - 99.78)^2 + \\ &\quad (99.3 - 99.78)^2 + (97.8 - 99.78)^2 + (100.2 - 99.78)^2 + \\ &\quad (98.5 - 99.78)^2 + (100.1 - 99.78)^2 + (101.0 - 99.78)^2) = 1.149\end{aligned}\tag{A1}$$

となります。標本サイズ  $n(=9)$  とし、真の沸点を  $\mu$  とすると、 $t$  統計量

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}}\tag{A2}$$

は自由度  $n-1$  の  $t$  分布にしたがいます。

$t_{0.025}(n-1)$  を「自由度  $n-1$  の  $t$  分布において、 $t$  統計量が  $t_{0.025}(n-1)$  以上である確率が 0.025 になるような  $t$  の値 (2.5%点)」とすると、

$$P\left(-t_{0.025}(n-1) \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}} \leq t_{0.025}(n-1)\right) = 0.95\tag{A3}$$

となります。(A3) 式を  $\mu$  についての不等式に書き換えて、問題の数値を代入すると、

$$P(99.78 - 0.357t_{0.025}(n-1) \leq \mu \leq 99.78 + 0.357t_{0.025}(n-1)) = 0.95\tag{A4}$$

となり、数表より  $t_{0.025}(9-1) = 2.306$  ですから、 $\mu$  の 95%信頼区間は 98.96 から 100.6 (°C) となります。

2.

問題から、帰無仮説  $H_0 : \mu = 100$ 、対立仮説  $H_1 : \mu < 100$  の検定を行います。1. で述べた通り、

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}}\tag{A5}$$

は、自由度  $n-1$  の  $t$  分布にしたがいます。

今回の問題では、「『 $\mu$  は 100 では大きすぎるから』帰無仮説を棄却し、『本当は  $\mu$  はもっと小さい』すなわち  $\mu < 100$  という対立仮説を採択する」という推論に持ってゆきたいと考えます。

(A5) 式によると、 $\mu$  が大きくなると、 $t$  は小さくなります。そこで、「 $t$  が、5%の確率でしか起きないくらいの、小さな値になるとき」帰無仮説が棄却されるように、棄却域を設定します。

$t$  分布の数表から、自由度  $n-1 = 8$  のとき、(A5) 式の  $t$  が  $-t_{0.05}(8) = -1.860$  以下である確率、すなわち  $P(t \leq -1.860)$  が 5%であることがわかります。ですから、問題文の数値、および帰無仮説  $\mu = 100$  を (A5) 式に入れて  $t$  を計算し、その値が  $-1.860$  以下であれば帰無仮説を棄却します。計算すると  $t = -0.616$  で、 $-1.860$  以下でないので、帰無仮説は棄却されません。すなわち、「この水の沸点は 100 °C より低い」とまでは言い切れません。