

今日は、「行列」や「ベクトル」の考え方の基本を、高校で習っていない人向けに手短かに解説します。

ベクトルと行列の計算

次回（第 7 回）のプリントでは、「画素が 2 つしかない画像」を考えて、その画素値 x_1, x_2 を画素値 z に

$$z = a_1x_1 + a_2x_2 \quad (1)$$

という式で変換する、という話が出てきます。これを、「ベクトル」の書き方では、次のように書きます。

$$z = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

右側の左側の $()$ を**行ベクトル**、右側の $()$ を**列ベクトル**といいます。このように数字を $()$ に入れて並べるだけで、上の (1) 式の計算をしたこととなります。

では、上の (1) 式のような計算が 2 組あるとしましょう。このとき、それぞれの組を添字 (1) と (2) で区別すると、それぞれを求める計算をベクトルで表すと

$$\begin{aligned} z^{(1)} &= \begin{pmatrix} a_{(1)1} & a_{(1)2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ z^{(2)} &= \begin{pmatrix} a_{(2)1} & a_{(2)2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3)$$

となります。この 2 つの式をひとつにまとめて、次のように書きます。

$$\begin{pmatrix} z^{(1)} \\ z^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{(1)1} & a_{(1)2} \\ a_{(2)1} & a_{(2)2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (4)$$

この式の右辺にある、数の 4 つ入った $()$ を**行列**といい、右辺の計算を「行列とベクトルのかけ算」といいます。行ベクトルが列になって並んでいるので、行列とよぶわけです。

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ を座標平面でのある点と考えると、(4) 式の計算は、 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ という点を $\begin{pmatrix} z^{(1)} \\ z^{(2)} \end{pmatrix}$ という点に移動する計算を表す、ということもできます。また、このときベクトルという言葉を使うと、「 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ は原点から点 (x_1, x_2) をさすベクトル（位置ベクトル）である」といいます。図形的には、原点から点 (x_1, x_2) まで伸びた矢印を想像すればよいでしょう。この言い方をすると、行列とベクトルのかけ算は、ベクトルをベクトルに変換する計算ということができます（図 1）。

行列と行列の計算

次回（第 7 回）のプリントには、

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad (5)$$

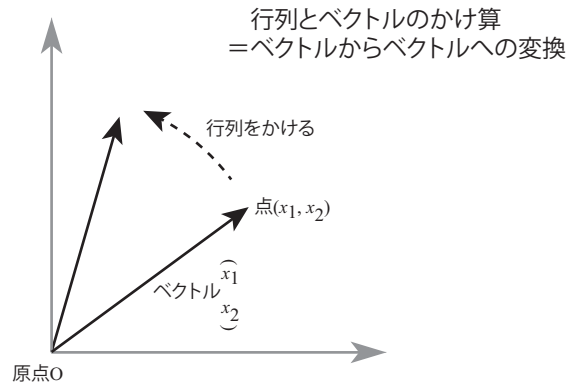


図 1: 行列とベクトルのかけ算.

という形の式も出てきます。ここで、右辺の λ は普通の数（スカラー）で、このとき右辺は $\begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \end{pmatrix}$ を表します。

次回のプリントでは、この式を満たす a_1, a_2 は 2 組あるので、 λ もそれぞれに対応して 2 つある、という話になっています。それらを $\lambda_{(1)}, \lambda_{(2)}$ と表すと、それぞれに対応する式は

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{(1)1} \\ a_{(1)2} \end{pmatrix} = \lambda_{(1)} \begin{pmatrix} a_{(1)1} \\ a_{(1)2} \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{(2)1} \\ a_{(2)2} \end{pmatrix} = \lambda_{(2)} \begin{pmatrix} a_{(2)1} \\ a_{(2)2} \end{pmatrix} \quad (7)$$

と表されます。

では、今度はこれらの 2 つの式を、ひとつにまとめて表してみましょう。列ベクトル $\begin{pmatrix} a_{(1)1} \\ a_{(1)2} \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} a_{(2)1} \\ a_{(2)2} \end{pmatrix}$ を左右にくっつけて、 $\begin{pmatrix} a_{(1)1} & a_{(2)1} \\ a_{(1)2} & a_{(2)2} \end{pmatrix}$ と、ひとつの行列で表します。すると、(6) 式, (7) 式の 2 つの式は、まとめて

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{(1)1} & a_{(2)1} \\ a_{(1)2} & a_{(2)2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{(1)1} & a_{(2)1} \\ a_{(1)2} & a_{(2)2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{(1)} & 0 \\ 0 & \lambda_{(2)} \end{pmatrix} \quad (8)$$

と表すことができます。この式の両辺は、「行列と行列のかけ算」になっています。

(8) 式の左辺は、上で述べたとおり、 $\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} a_{(1)1} \\ a_{(1)2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{(2)1} \\ a_{(2)2} \end{pmatrix} \right)$ のように列ベクトルを左右にくっつけたものです。

一方 (8) 式の右辺は、右側の行列を列ベクトルに分けて $\begin{pmatrix} a_{(1)1} & a_{(2)1} \\ a_{(1)2} & a_{(2)2} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} \lambda_{(1)} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_{(2)} \end{pmatrix} \right)$ と表すと、左側の行列 $\begin{pmatrix} a_{(1)1} & a_{(2)1} \\ a_{(1)2} & a_{(2)2} \end{pmatrix}$ と右側の行列の左側の列ベクトル $\begin{pmatrix} \lambda_{(1)} \\ 0 \end{pmatrix}$ の積は $\begin{pmatrix} \lambda_{(1)} a_{(1)1} + 0 \cdot a_{(2)1} \\ \lambda_{(1)} a_{(1)2} + 0 \cdot a_{(2)2} \end{pmatrix}$

となり、すなわち $\lambda_{(1)} \begin{pmatrix} a_{(1)1} \\ a_{(1)2} \end{pmatrix}$ となります。右側の列ベクトルについても同様です。このように、(行列×列ベクトル) のかけ算を2つ同時に行うのが、行列のかけ算です。

要素が p 個あるベクトルの場合

ここまでは、「画素が2つしかない画像」を考えたところから出発して、2つの要素からなるベクトルについての計算を考えてきました。では、「要素が p 個あるベクトル」の場合を考えてみましょう。

(6) 式, (7) 式の形の式を、要素が p 個の場合に表すと、

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1p} \\ s_{12} & s_{22} & \cdots & s_{2p} \\ \vdots & & \ddots & \\ s_{p1} & s_{p2} & \cdots & s_{pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} \quad (9)$$

となります。また、(8) 式を、要素が p 個のベクトルの場合に表すと、

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1p} \\ s_{12} & s_{22} & \cdots & s_{2p} \\ \vdots & & \ddots & \\ s_{p1} & s_{p2} & \cdots & s_{pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} & \cdots & a_{1(p)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} & \cdots & a_{2(p)} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{p(1)} & a_{p(2)} & \cdots & a_{p(p)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} & \cdots & a_{1(p)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} & \cdots & a_{2(p)} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{p(1)} & a_{p(2)} & \cdots & a_{p(p)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{(1)} & & & 0 \\ & \lambda_{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_{(p)} \end{pmatrix} \quad (10)$$

となります。

こんな式は、大変複雑でとても扱いきれません。また、要素が p 個ある場合は、ベクトルも p 次元空間での「矢印」になり、2次元の場合のように図形的に考えることもできません。

そこで、(10) 式の各行列をそれぞれひとつの文字で表して、

$$SP = PA \quad (11)$$

と表してしまいます。このように、**複雑な計算をあたかも数の計算のように表して、単純な形で理解しようというのが、行列というものが考えられた理由**です。

ただし、行列のかけ算では、積 AB と積 BA は同じとは限りません。すなわち、数のかけ算とは違って、かける順番が問題になります。

転置行列, 対称行列, 直交行列

転置行列とは、ある行列の行と列を入れ替えたもので、例えば行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の転置行列は $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ です。行列 A の転置行列を、 ${}^tA, A^t, A^T, A'$ などと表します。今回の講義のプリントでは最後の A' を使っていますが、これは統計学の教科書に多い方式です。さらに、ある行列とその転置行列が同じとき、その行列を**対称行列**といいます。

一方、ある行列に含まれる各列ベクトルが互いに直交しているとき、この行列を**直交行列**といいます。もともと直交している2つのベクトルを直交行列で変換すると、それぞれを変換したベクトルもやはり直交しています。図形的には、直交座標の座標軸を直交行列で変換する計算は、座標軸を直交したまま回転する計算にあたります (図2)。

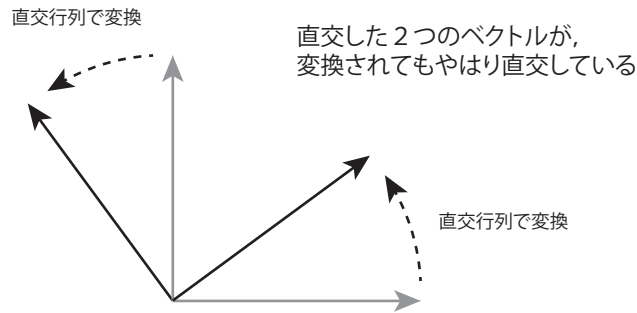


図 2: 直交行列によるベクトルの変換.

逆行列

さきほど「行列と行列のかけ算」を説明しましたが、行列には「割り算」はありません。そのかわりにあるのが**逆行列**です。

行列の A の逆行列 A^{-1} は、 $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ となる行列のことです。ここで、 I は「単位行列」といい、どんな行列 X に対しても $XI = IX = X$ となる行列のことです。つまり「かけても何もおこらない行列」で、数のかけ算でいえば“1”（単位元）にあたります。単位行列の中身は、左上から右下に向かう対角線上の数（対角成分）がすべて1、他はすべて0になります。例えば $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は単位行列です。

このことから、行列の積 XA に右から A^{-1} をかけると $XAA^{-1} = X$ となり、あたかも「 A で割った」と同じような計算ができます。例えば、(11) 式は、逆行列を使うと

$$P^{-1}SP = \Lambda \quad (12)$$

とも表されます。

なお、行列 A が直交行列のときは、その逆行列 A^{-1} は転置行列 A' と同じであることが知られています。図2の直交変換で考えると、「直交行列による変換」はベクトルの回転に相当しますから、その逆行列による変換は、逆回りの回転に相当することになります。