

前回の講義で、

領域  $D$  で正則な関数  $f(z)$  について、経路  $C$  が  $D$  の内部の閉曲線ならば、 $\oint_C f(z)dz = 0$  である。

という「コーシーの積分定理」を説明しました。では、閉曲線  $C$  の内側に、関数  $f(z) = \frac{1}{z-1}$  における  $z=1$  のように正則でない点、いわば「穴」があいている場合はどうなるか、が今回の話題です。

### $f(z) = z^n$ の積分

今日の問題のような積分を考えるために、関数を級数で表して、各項に対する積分を考えます。その準備として、 $f(z) = z^n$  を、単位円周 (複素平面における、原点を中心とする半径 1 の円周) にそって正の向きにまわって積分した時の値を考えます。

$C$  を単位円周とします。まず、 $n = 0, 1, 2, \dots$  の場合は、円周内で  $z^n$  は正則ですから、コーシーの積分定理により  $\oint_C f(z)dz = 0$  です。

一方、 $n = -1, -2, \dots$  のとき、あらためて  $f(z) = \frac{1}{z^n}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) とおきます。このとき、 $z=0$  で  $f(z)$  は正則ではありません。この場合は、単位円周  $C$  を正の向きにまわる  $z$  が  $z = e^{i\theta}$  ( $0 \leq \theta < 2\pi$ ) と表されるので、

$$\begin{aligned} \oint_C f(z)dz &= \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} \frac{dz}{d\theta} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} i e^{i\theta} d\theta \\ &= i \int_0^{2\pi} e^{i(1-n)\theta} d\theta \end{aligned} \quad (1)$$

となります。この積分は、 $n=1$  のとき

$$\oint_C \frac{1}{z} dz = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i \quad (2)$$

となり、 $n=2, 3, \dots$  のときは

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{1}{z^n} dz &= \frac{i}{i(1-n)} \left[ e^{i(1-n)\theta} \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{1-n} \left[ e^{2(1-n)\pi i} - 1 \right] \end{aligned} \quad (3)$$

で、 $e^{2(1-n)\pi i} = \cos(2(1-n)\pi) + i \sin(2(1-n)\pi) = 1$  ですから上の積分は 0 です。

同様に、 $a$  を中心とする半径 1 の円周を  $C$  とするとき、

$$\oint_C \frac{1}{(z-a)^n} dz = \begin{cases} 2\pi i & n=1 \\ 0 & n=2, 3, \dots \end{cases} \quad (4)$$

となります。

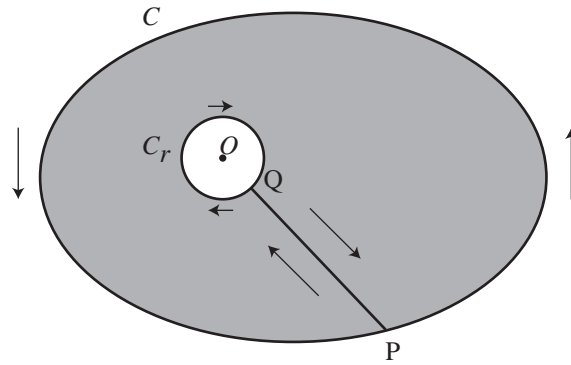


図 1: コーシーの積分公式

## コーシーの積分公式

**コーシーの積分公式**は、領域  $D$  で正則な関数  $f$  の点  $z$  における値  $f(z)$  が、 $D$  内で点  $z$  を囲み正の方向に 1 周する閉曲線  $C$  に沿った積分を使って

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (5)$$

と表されるというものです。とくに  $z = 0$  のとき、 $C$  を原点を囲み正の方向に一周する閉曲線として

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta \quad (6)$$

となります。この公式は、正則関数  $f$  の点  $z$  での値は、 $z$  を囲む閉曲線上の値だけで決まってしまうことを示しています。正則関数を「軟らかい板を、ぐにやぐにやとどこにも折り目がなく曲げたようなもの」と考えれば、ある点での関数の値が周囲での値によって決まってしまう、というのは、それほど不思議ではありません。

(6) 式の意味を考えるため、図 1 のような、原点を囲む閉曲線  $C$  とその内側で原点を囲む半径  $r$  の円  $C_r$ 、それに両者を結ぶ線分  $PQ$  を考えます。関数  $\frac{f(\zeta)}{\zeta}$  は原点で正則ではありませんが、 $P$  から  $C$  を正の向きに 1 周  $\rightarrow PQ \rightarrow C_r$  を逆向きに 1 周  $\rightarrow QP$  という経路を考えると、この経路は閉曲線で、その内部で関数  $\frac{f(\zeta)}{\zeta}$  は正則です。よって、コーシーの積分定理により

$$\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta + \int_P^Q \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta + \oint_{-C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta + \int_Q^P \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta = 0 \quad (7)$$

で、 $P \rightarrow Q$  の積分と  $Q \rightarrow P$  の積分は打ち消し合い、 $-C_r$  ( $C_r$  の負の方向) に沿った積分は  $(-1) \times C_r$  の正の方向に沿った積分となるので、

$$\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta = \oint_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta \quad (8)$$

となります。 $r \rightarrow 0$  のとき、上式の右辺は  $\oint_{C_r} \frac{f(0)}{\zeta} d\zeta$  に収束し<sup>1</sup>、前節で説明した  $\frac{1}{z}$  の積分を使うと

$$\oint_{C_r} \frac{f(0)}{\zeta} d\zeta = f(0) \oint_{C_r} \frac{1}{\zeta} d\zeta = 2\pi i f(0) \quad (9)$$

<sup>1</sup>なぜ収束するのかは、参考文献を参照してください。

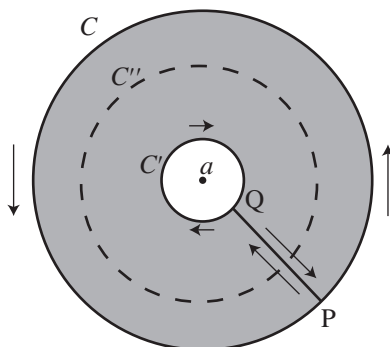


図 2: 孤立特異点とローラン級数展開

となりますから、(6) 式が得られました。これをさらに  $z$  だけ (積分経路も含めて) 平行移動すると、(5) 式が得られます<sup>2</sup>。

### 孤立特異点とローラン級数展開

領域  $D$  において、関数  $f(z)$  が 1 点  $a$  を除いて正則であるとき、 $a$  を  $f(z)$  の**孤立特異点**といいます。つまり、今日の最初に述べた「穴」です。

このとき、 $a$  を中心とする円周  $C$  と、その内部にありやはり  $a$  を中心とする円周  $C'$  を考え、図 2 のように、 $P$  から  $C$  を正の向きに 1 周  $\rightarrow PQ \rightarrow C'$  を逆向きに 1 周  $\rightarrow QP$  という閉じた経路を考えます。すると、経路の内部で  $f(z)$  は正則ですから、 $f(z)$  をコーシーの積分公式を用いて表すことができます。図 1 と同様の関係を考慮すると

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (10)$$

となります。

ここで、(10) 式の第 1 項の積分の過程では、 $\zeta$  が外側の経路  $C$  を動き、 $z$  は  $C$  の内部にあるので  $|z - a| < |\zeta - a|$  です。そこで、

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - a) - (z - a)} = \frac{1}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - a}{\zeta - a}} \quad (11)$$

と変形すると、右辺の 2 つめの分数は初項 1、公比  $\frac{z - a}{\zeta - a}$  の等比級数の和で表され、

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a} \left\{ 1 + \frac{z - a}{\zeta - a} + \left( \frac{z - a}{\zeta - a} \right)^2 + \dots \right\} \quad (12)$$

となります。同様に、(10) 式の第 2 項の積分の過程では、 $\zeta$  が内側の経路  $C'$  を動き、 $z$  は  $C'$  の外部に

<sup>2</sup>詳細は、参考文献を参照してください。

あるので  $|\zeta - a| < |z - a|$  で、

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{-1}{\zeta - a} \left\{ 1 + \frac{\zeta - a}{z - a} + \left( \frac{\zeta - a}{z - a} \right)^2 + \dots \right\} \quad (13)$$

と表されます。

(12) 式, (13) 式を (10) 式に代入すると、

$$f(z) = \dots + \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{a_{-(n-1)}}{(z-a)^{n-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) + \dots + a_{n-1}(z-a)^{n-1} + a_n(z-a)^n + \dots \quad (14)$$

ただし

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (15)$$

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C'} f(\zeta)(\zeta - a)^{n-1} d\zeta \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (16)$$

となります<sup>3</sup>。

ここで、図2の円環領域で  $f(z)$  は正則なので、コーシーの積分定理により

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C f(\zeta)(\zeta - a)^{n-1} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C'} f(\zeta)(\zeta - a)^{n-1} d\zeta = 0 \quad (17)$$

であり、これを使うと、(15) 式と (16) 式を合わせて

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(\zeta)(\zeta - a)^{-n-1} d\zeta \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (18)$$

と表すことができます。

関数  $f(z)$  をこのような級数で表すことを、 $f(z)$  の孤立特異点  $a$  のまわりの**ローラン (Laurent) 級数展開**といいます。

関数  $f(z)$  と孤立特異点  $a$  について、 $|f(z)| \rightarrow \infty (z \rightarrow a)$  のとき、 $a$  を  $f(z)$  の**極**といいます。これは、ローラン級数の負のべきの項が有限、すなわち級数が  $a_{-n} (n \geq 1)$  から始まることと同値です (詳細は略)。このとき、 $a$  を  **$n$  位の極**といいます。なお、負のべきの項が無限に現れるときは、 $a$  は**真性特異点**とよばれます。

---

## 留数

図2において、 $f(z)$  を円環部分の中にある円周  $C''$  に沿って正の向きに1周して積分することを考えます。 $f(z)$  をローラン級数展開したものの各項を積分すると考えると、今回の最初に説明した「 $z^n$  の積分」により、 $\frac{1}{z-a}$  の項以外はすべて0となり、

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C''} f(z) dz \quad (19)$$

---

<sup>3</sup>本当は、ここで「無限級数の積分」を「積分の無限級数」に置き換えられるのは、当然ではありませんが、ここでは詳細は略します。

となります<sup>4</sup>。この  $a_{-1}$  を、 $f(z)$  の孤立特異点  $a$  における**留数 (residue)** といい、 $\text{Res}(a; f)$  で表します。

ここで、孤立特異点  $a$  が  $n$  位の極であるとき

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) + \cdots \quad (20)$$

と表されますから、

$$(z-a)^n f(z) = a_{-n} + a_{-n+1}(z-a) + \cdots + a_{-1}(z-a)^{n-1} + a_0(z-a)^n + \cdots \quad (21)$$

という、べき級数が得られます。したがって、両辺を  $(n-1)$  回微分すると、

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(z-a)^n f(z) = (n-1)!a_{-1} + \frac{n!}{1!}a_0(z-a) + \frac{(n+1)!}{2!}a_1(z-a)^2 + \cdots \quad (22)$$

となり、

$$\text{Res}(a; f) = a_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(z-a)^n f(z) \quad (23)$$

が得られます。これらのことは、孤立特異点つまり「穴」を囲んだ閉曲線上の積分が、留数で表され、しかも留数は上の式が計算できれば求められることを表しています。

また、閉曲線  $C$  の内部で、関数  $f(z)$  が有限個の孤立特異点  $b_1, b_2, \dots$  を除いて正則であるとします。このとき、 $b_1, b_2, \dots$  のそれぞれを囲み  $C$  の内部にある円周を正の向きに一周する経路を  $C_1, C_2, \dots$  とすると、これまでと同様の考えで、コーシーの積分定理により

$$\oint_C f(z) dz - \oint_{C_1} f(z) dz - \oint_{C_2} f(z) dz - \cdots = 0 \quad (24)$$

ですから、

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz = \text{Res}(b_1; f) + \text{Res}(b_2; f) + \cdots \quad (25)$$

がなりたちます。このことは、いくつかの「穴」を囲んだ閉曲線上の積分は、それぞれの「穴」での留数がわかれば求められることを示しています。

## 留数と定積分

留数の考えを使って、図4に示す、幅  $2r$ ・高さ  $r$  の長方形の経路  $C$  に沿った  $f(z) = \frac{1}{z^4+1}$  の積分を考えます。

$$\frac{1}{z^4+1} = \frac{1}{(z - \frac{1+i}{\sqrt{2}})(z - \frac{-1+i}{\sqrt{2}})(z - \frac{-1-i}{\sqrt{2}})(z - \frac{1-i}{\sqrt{2}})} \quad (26)$$

ですから、4つある  $f(z)$  の孤立特異点  $\frac{1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, \frac{1-i}{\sqrt{2}}$  は、すべて1位の極です。

<sup>4</sup>こう言えるのは、ローラン級数が「一様収束」しているからです。詳細は略します。

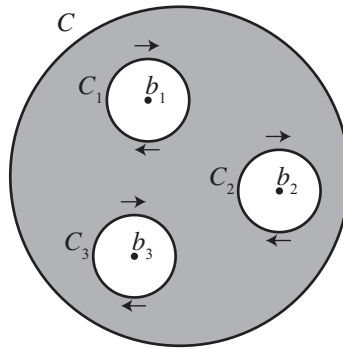


図 3: 有限個の孤立特異点を含む場合

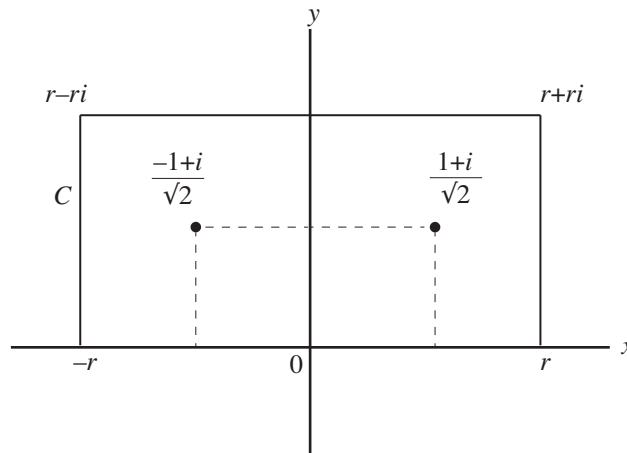


図 4: 留数と定積分

図 4 の経路  $C$  の内部に入っている極は、 $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ ,  $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$  だけです。ここで、(23) 式より

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Res}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}; f\right) &= \lim_{z \rightarrow \frac{1+i}{\sqrt{2}}} (z - \frac{1+i}{\sqrt{2}}) f(z) \\
 &= \frac{1}{\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} - \frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right) \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} - \frac{-1-i}{\sqrt{2}}\right) \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} - \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)} \\
 &= \frac{-1-i}{4\sqrt{2}}
 \end{aligned} \tag{27}$$

となり、同様に  $\operatorname{Res}\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}; f\right) = \frac{1-i}{4\sqrt{2}}$  となります。

よって、(25) 式より、

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz = \operatorname{Res}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}; f\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}; f\right) = -\frac{i}{2\sqrt{2}} \tag{28}$$

で、すなわち  $\oint_C \frac{1}{z^4+1} dz = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$  が得られます。

この考えを使って、実関数の積分  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1} dx$  を求めることを考えます。そのために、経路  $C$  を各辺に分けて、それぞれの辺での  $\frac{1}{z^4+1}$  の積分が、実軸上以外では  $r \rightarrow \infty$  のとき 0 になることを示します。これには、実軸以外の辺上では  $|z| \geq r$  であることを用います。

例えば、長方形の右側の立辺では

$$\begin{aligned} \left| \int_r^{r+ri} \frac{1}{z^4+1} dz \right| &\leq \int_r^{r+ri} \frac{1}{|z|^4+1} d|z| \\ &\leq \int_0^r \frac{1}{r^4+1} dy = \frac{r}{r^4+1} \end{aligned} \tag{29}$$

で、 $r \rightarrow \infty$  のとき 0 になります。他の辺でも同様に、 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$  が得られます。

### 参考文献

志賀浩二，複素数 3 0 講，朝倉書店，1989. ISBN978-4-254-11481-2