2014 年度春学期　画像情報処理　第３回

第１部・画像のサンプリングと周波数／ フーリエ変換とサンプリング定理

フーリエ変換

前回は，周期関数を三角関数（虚数指数の指数関数）の級数，すなわち「波の足し合わせ」で表したフーリエ級数について説明しました。では，元の関数が，周期関数でない一般の関数のときは，どうなるでしょうか。

この場合は，「周期が無限大である」と考えます。すなわち，前回の例では，周期関数 $f(x)$ の周期を L としましたが，今回は $L \to \infty$ となったときの極限を考えます。

フーリエ級数の式（前回の (1) 式）

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(i2\pi \frac{n}{L} x\right) \tag{1}$$

は，関数 $f(x)$ が基本周期が $L, L/2, L/3, \ldots, L/n, \ldots$ の波の足し合わせであることを示しています。ここで L が大きくなると，n/L と $(n+1)/L$ の差 $1/L$ は小さくなります。このことは，$f(x)$ をフーリエ級数で表したとき，隣り合う波の周波数の差は小さくなってゆくことを示しています。

そこで，この周波数の差 $1/L$ を $\Delta\nu$ で表すことにします。このとき，上のフーリエ級数の式と，フーリエ係数の式（前回の (5) 式）

$$\frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x) \exp\left(-i2\pi \frac{n}{L} x\right) dx \tag{2}$$

をあわせると，上の $\Delta\nu$ を使って

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\Delta\nu \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(\tau) \exp\left(-i2\pi n\Delta\nu\tau\right) d\tau\right) \exp\left(i2\pi n\Delta\nu x\right) \tag{3}$$

となります。$n\Delta\nu$ は，（周波数の差）×（項の個数）ですからある周波数をさします。これを，周波数 ν で表します。また，$L \to \infty$ のとき $\Delta\nu \to 0$ ですから，$\Delta\nu$ を含む総和は，$d\nu$ を含む積分になります。よって，

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \exp\left(-i2\pi\nu\tau\right) d\tau\right) \exp\left(i2\pi\nu x\right) d\nu \tag{4}$$

が得られます。これを，

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp\left(-i2\pi\nu x\right) dx \tag{5}$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) \exp\left(i2\pi x\nu\right) d\nu \tag{6}$$

のように分けて表すとき，式 (5) を**フーリエ変換** (Fourier transformation)，式 (6) を**逆フーリエ変換** (inverse Fourier transformation) とよびます。関数 $F(\nu)$ は，もとの関数 $f(x)$ に，どのような周波数の波がどの程度含まれているかを表しています。上で述べたように，フーリエ級数において $L \to \infty$ としたので，級数で隣接する波の間隔が 0 に近づいていきます。したがって，フーリエ係数の並び $\{a_k\}$ は，ついに連続関数 $F(\nu)$ に達するわけです。$f(x)$ が存在する空間を**実空間**，$F(\nu)$ が存在する空間を**周波数空間**とよびます。また，$f(x)$ と $F(\nu)$ を**フーリエ変換対**とよびます。

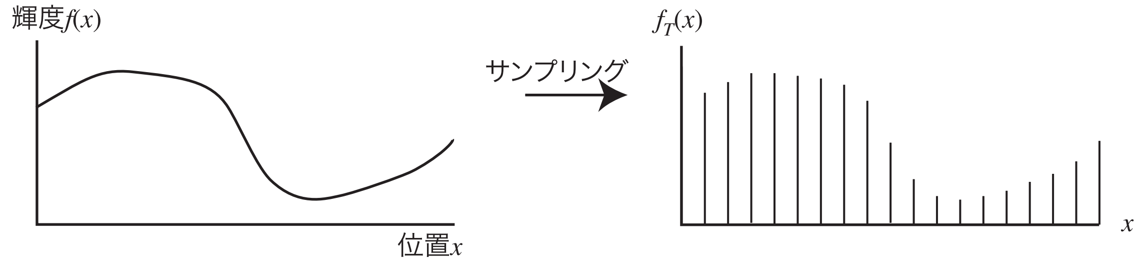

図 1: サンプリング

ここまでは 1 次元の関数の話をしてきましたが，画像のような 2 次元の関数のフーリエ変換は，

$$F(\nu_x, \nu_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp\{-i2\pi(\nu_x x + \nu_y y)\} dx dy \tag{7}$$

となります。この場合の，２次元の周波数 (ν_x, ν_y) が，前回説明した空間周波数です。

サンプリングとサンプリング定理

連続的な明度分布からディジタル画像を生成するためには，連続的な明度分布から一定間隔で明度を取り出す作業を行う必要があります。これを**サンプリング**（sampling, 離散化）といいます（図 1）。このとき，間隔をある程度より細かくすれば，サンプリングされた画像から元の連続的な明度分布を再現することができます。この「最小限の細かさ」はいくらなのかを表す**サンプリング定理** (sampling theorem) について，この節でみてみましょう。

ここでも，簡単のため画像を 1 次元の関数として考えます。画像中の位置 x に対して，その位置の明度が関数 $f(x)$ で与えられているとします。

もとの関数 $f(x)$ を周期 T でサンプリングした関数 $f_T(x)$ は，$f(x)$ に次式で表される周期 T の**くし型関数** (comb function)

$$\mathrm{comb}_T(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nT) \tag{8}$$

をかけたもの，すなわち

$$f_T(x) = f(x)\mathrm{comb}_T(x) \tag{9}$$

として表されます（図 2）．ここで，$\delta(x)$ は**ディラックのデルタ関数** (Dirac's delta function) とよばれるもので，

$$\delta(x) = 0 \ \ (x \neq 0), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \tag{10}$$

というものです。簡単にいえば，「積分すると 1 になるような，幅 0 のピーク（インパルス）」です。したがって，くし形関数は「インパルスが等間隔に無限に並んだもの」となります。

ところで，サンプリングを行うのに，デルタ関数を並べたくし形関数の代わりに

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases} \tag{11}$$

という関数を並べたものを用いてはいけないのでしょうか？

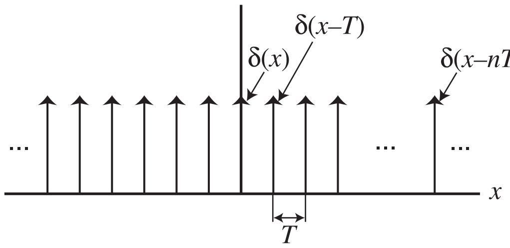

図 2: くし形関数

それはだめです。(11) 式の関数は，幅がゼロなので，積分するとゼロです。したがって，この関数を並べて元の関数にかけると，それも積分するとゼロです。つまり，画面全体の明るさの合計がゼロになってしまうわけで，これはおかしいです。デルタ関数は，**幅がゼロなのに，積分すると 0 でなく 1** という，きわめて奇妙な関数（正式には超関数）なのです。

さて，サンプリングされた画像 $f_T(x)$ がとる空間周波数の範囲を調べるため，$f_T(x)$ のフーリエ変換がどうなるかを調べてみましょう。ここで，２つの関数の積のフーリエ変換についての次のような定理を用います。

$$FT[f(x)g(x)](\nu) = FT[f(x)](\nu) * FT[g(x)](\nu) \tag{12}$$

ここで，$FT[f(x)]$ は関数 $f(x)$ のフーリエ変換を表します。また，記号「$*$」は**コンヴォリューション**（convolution, 畳み込み積分）という演算で，

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(t-y)dy \tag{13}$$

と定義されます。つまり，**かけ算のフーリエ変換は，フーリエ変換のコンヴォリューション**となります (証明は付録 1 を見てください)。

これを使って (9) 式のフーリエ変換を求めると，

$$FT[f_T(x)](\nu) = FT[f(x)](\nu) * FT[\mathrm{comb}_T(x)](\nu) \tag{14}$$

となります。この式の右辺第 1 項は，元の関数 $f(x)$ のフーリエ変換です。第２項はくし形関数のフーリエ変換ですが，実は

$$FT[\mathrm{comb}_T(x)](\nu) = \frac{1}{T}\mathrm{comb}_{1/T}(\nu) \tag{15}$$

となります（証明の概略は付録２を見てください)。つまり，**くし形関数のフーリエ変換はくし形関数**で，また，もとのくし形関数の周期と周波数空間でのくし形関数の周期は，反比例することがわかります。したがって，

$$FT[f_T(x)](\nu) = \frac{1}{T}\{FT[f(x)](\nu) * \mathrm{comb}_{1/T}(\nu)\} \tag{16}$$

となります。

さて，「くし形関数とのコンヴォリューション」とは何でしょうか？ これを考えるため，まず「デルタ関数とのコンヴォリューション」を考えてみましょう。(13) 式から，

$$f(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\delta(t-y)dy \tag{17}$$

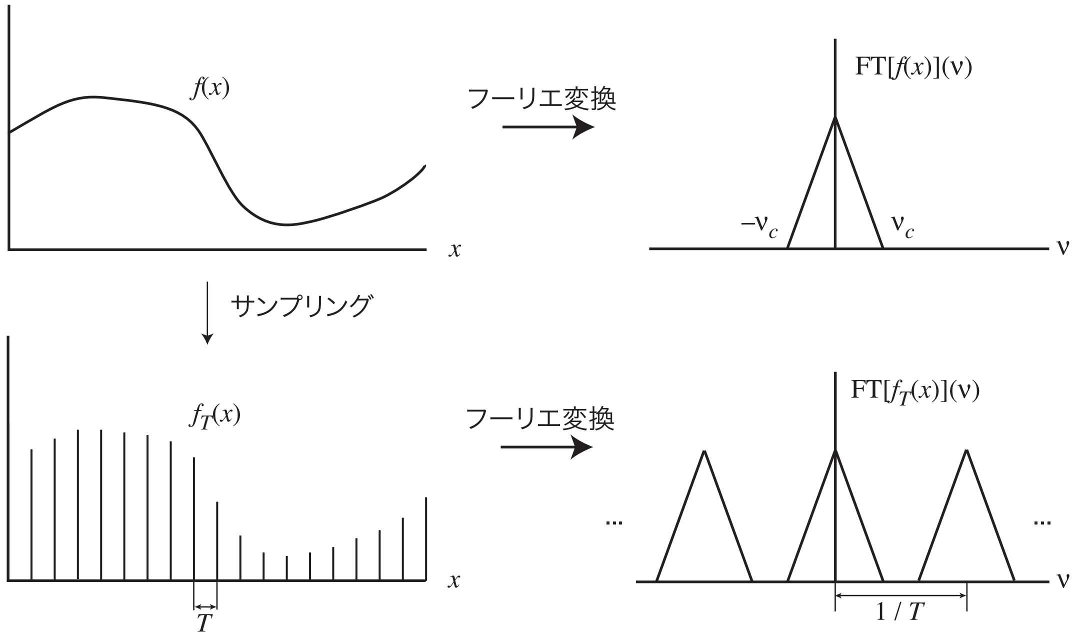

図 3: サンプリングとフーリエ変換

となります。(17) 式の右辺では y が $-\infty$ から ∞ まで動くわけですが，$t = y$ のとき以外は $\delta(t-y) = 0$ ですから，$f(y)\delta(t-y)$ の積分への寄与は 0 です。よって，

$$
\begin{aligned}
f(t) * \delta(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\delta(t-y)dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\delta(t-t)dy \\
&= f(t)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(0)dy = f(t)
\end{aligned} \tag{18}
$$

となり，**ある関数とデルタ関数とのコンヴォリューションは，その関数自身**になります。

くし形関数はデルタ関数が一定間隔で並んだものですから，「ある関数とくし形関数とのコンヴォリューションは，ある関数全体が一定間隔で並んだもの」になります。したがって，(16) 式は，**元の明度分布 $f(x)$ を周期 T でサンプリングした $f_T(x)$ をフーリエ変換すると，元の明度分布 $f(x)$ をフーリエ変換した $FT[f(x)]$ が周期 $1/T$ で無限に並んだものになる**ことを意味しています。これを図で表したものが図 3 です。ここで ν_c は**カットオフ周波数** (cutoff frequency) とよばれ，元の明度分布 $f(x)$ がもつ最大の周波数を意味します。$f(x)$ が実関数の場合，周波数 ν でフーリエ変換 $FT[f(x)]$ が 0 でないときには，周波数 $-\nu$ でもフーリエ変換は 0 でない[1]ので，$FT[f(x)]$ の成分は $-\nu_c$ から ν_c の範囲に存在します。

さて，図 4(a) のように，周波数空間でくし形関数の間隔が十分広い場合は，隣りあう $FT[f(x)]$ どうしは重なりません。そこで，サンプリングされた $f_T(x)$ をフーリエ変換した $FT[f_T(x)]$ から，周波数空間で幅 $1/T$ の部分を切り出すと，元の関数のフーリエ変換が取り出されます。すなわち，画像でいえば，もとの画像の明度分布の情報はサンプリングによって失われないことがわかります。これに対して，図 4(b) のように周波数空間でくし形関数の間隔が狭い場合は，隣りあう $FT[f(x)]$ どうしが重なってしまい，周波数空間で幅 $1/T$ の部分を取り出しても元の画像の明度分布のフーリエ変換をとりだすことは

[1] $f(x)$ が実関数のとき，そのフーリエ変換の振幅（絶対値）は偶関数に，位相は奇関数になります。

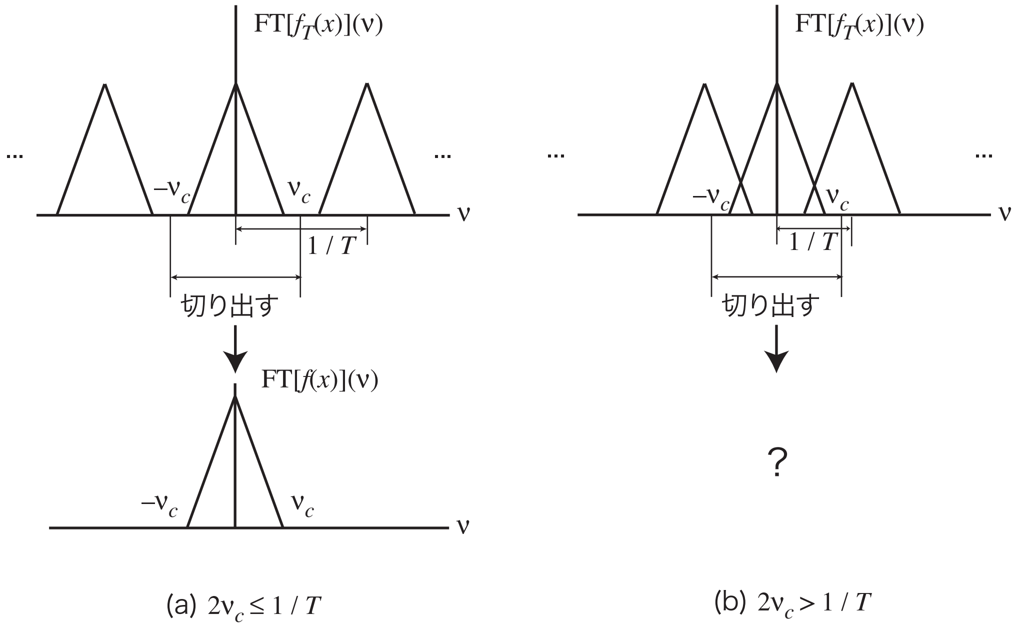

図 4: サンプリング定理

できず，誤った関数をとりだしてしまいます。この現象を**エイリアジング**（aliasing, 異名効果）といいます。

元の $FT[f(x)]$ は $-\nu_c$ から ν_c の範囲に存在しますから，図 4(a) のように隣りあう $FT[f(x)]$ 同士が重ならないようにするには，間隔 $1/T$ が $2\nu_c$ 以上であればよいことになります。T はサンプリングの間隔ですから，$1/T$ は単位長さあたりのサンプリングの回数，すなわちサンプリングの細かさを表します。つまり，**元の明度分布のもつ最大の周波数の２倍より細かくサンプリングすれば，元の明度分布をサンプリングされたディジタル画像から再現できる**ことがわかります。これが，この節の最初に述べたサンプリング定理です。

身近な例でいえば，（空間周波数ではなく時間周波数の話になりますが）音楽用コンパクトディスク(CD) ではサンプリング周波数は 44.1kHz で，すなわち毎秒 44100 回の細かさでサンプリングを行っています。したがって，音楽 CD で再生できる最高の周波数は 22.05kHz です。ですから，音源をサンプリングする前に，22.05kHz 以上の周波数の音が入らないようにフィルタリングをしておかないと，再生のさいエイリアジングを起こしてしまいます。

付録１．コンヴォリューションとフーリエ変換

実空間の関数 f, g のフーリエ変換をそれぞれ F, G とすると，逆フーリエ変換の式（(6) 式）から，

$$\begin{aligned} & f(x)g(x) \\ = \quad & \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu)\exp(i2\pi\nu x)d\nu \int_{-\infty}^{\infty} G(\mu)\exp(i2\pi\mu x)d\mu \\ = \quad & \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(\nu)G(\nu)d\nu\exp(i2\pi(\nu+\mu)x)d\mu \end{aligned} \tag{A1}$$

となります。ここで $\nu+\mu=\xi$ と変数変換すると

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(\nu)G(\xi-\nu)d\nu\exp(i2\pi\xi x)d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[F*G](\xi)\exp(i2\pi\xi x)d\xi \\ &= FT^{-1}[F*G](x) \end{aligned} \tag{A2}$$

となるので，(A2) 式の逆変換を考えると (12) 式が得られます。

付録２．くし形関数のフーリエ変換（概略）

(8) 式のくし形関数 $\mathrm{comb}T(x)$ の定義から，$\mathrm{comb}T(x)$ は周期 T の周期関数であることがわかります。周期 T の周期関数は，周波数が $1/T$ の整数倍である正弦波の級数，すなわち

$$\mathrm{comb}_T(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\exp(i2\pi\frac{n}{T}x) \tag{A3}$$

で表されます（n は整数)。周波数 n/T の係数 a_n は，直交関数系の性質から $\exp(-i2\pi\frac{n}{T}x)$ をかけて積分すれば求まります。このとき積分区間は $-\infty$ から ∞ ではなく，周期 T の周期関数ですから $-T/2$ から $T/2$ になります。また正規化のために係数 $1/T$ をかけます。すると，

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\mathrm{comb}_T(x)\exp(-i2\pi\frac{n}{T}x)dx \\ &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\delta(x)\exp(-i2\pi\frac{n}{T}x)dx \\ &= \frac{1}{T}\exp(-i2\pi\frac{n}{T}\cdot 0)=\frac{1}{T} \end{aligned} \tag{A4}$$

となりますから，

$$\mathrm{comb}_T(x)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp(i2\pi\frac{n}{T}x) \tag{A5}$$

となります。よって，そのフーリエ変換は

$$FT[\mathrm{comb}_T(x)](\nu)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}FT[\exp(i2\pi\frac{n}{T}x)](\nu) \tag{A6}$$

となります。ここで, 前回の説明にあったように, $\exp(i2\pi\frac{n}{T}x)$ をフーリエ変換すると周波数空間で $\nu=n/T$ のところにピークがたつわけですから，(A6) 式から

$$\begin{aligned} FT[\mathrm{comb}_T(x)](\nu) &= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\nu-\frac{n}{T}) \\ &= \frac{1}{T}\mathrm{comb}_{1/T}(\nu) \end{aligned} \tag{A7}$$

が得られます。

参考文献

H. P. Hsu（佐藤平八訳），フーリエ解析，森北出版， ISBN4- 627-93010-0
伊東一良編，原理がわかる・現場で使える 信号処理，丸善，ISBN978-4-621-08210-2

なお，各参考書では周波数 ν のかわりに角周波数 $\omega = 2\pi\nu$ を使って説明されていることも多く，その場合係数等が違っていることに注意してください。また，フーリエ変換と逆フーリエ変換につく係数も表現のしかたによって違っています。