

2015年度秋学期 応用数学（解析） 第2回

第1部・「無限」の理解
無限にも大小がある

浅野 晃
関西大学総合情報学部



1

無限とは
「モノ」ではなく「コト」

2

「 ∞ 」という数字があるのか

「 ∞ 」という数字はありません

無限とは

「無限」という「モノ」があるのではなく
「無限であるコト」

数学では、「コト」ではなく
「モノ」のほうが扱いやすい。

「無限」を具体的な数字で扱うには？

3

「数えられる」無限

1, 2, 3, ... ←そして、「無限」

自然数とは、数えるための数字

自然数の集合と同じ無限を

「数えられる無限」すなわち

[可算無限] という

その「個数」は [可算基数] \aleph_0 (アレフゼロ)
(よく「可算無限個」という)

4

どうやって数えるのか

自然数と対応がつく集合は数えられる

自然数 1, 2, 3, ... 1対1対応がつく
 ↓ ↓ ↓ ↓ ([全単射] が
集合A = {a, b, c, ...} 存在する) なら

この集合の [基数] ([濃度]) は \aleph_0
[可算無限集合] という

偶数の集合の濃度は

偶数と自然数とは対応がつくか

自然数 1, 2, 3, ..., n, ...
 ↓ ↓ ↓ ↓ ↓
偶数 2, 4, 6, ..., 2n, ...

1対1対応がつく
(全単射が存在する)

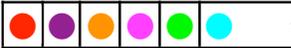
偶数の基数も \aleph_0

自然数と「個数」は同じ

「ホテル無限」

ヒルベルトの「ホテル無限」

ホテル無限には、可算無限個の部屋がある

「ただいま 満室です」
1号室 2 3 4 5 ...


さらに客が一人やって来たら？

部屋にいる客全員が
隣の部屋に移れば
1号室が空く

1号室 2 3 4 5 ...


実数の基数と 対角線論法

9

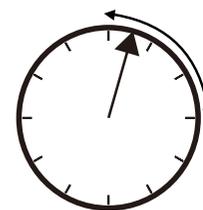
時計の針の止まる場所

連続的に針が進む時計

ボタンを押すと、その場で針が止まる

目をつぶって

ボタンを押したとき



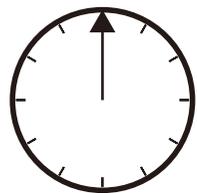
12時から3時の間のどこかに
止まる確率
=円周の1/4だから、確率も1/4

2015

10

時計の針の止まる場所

では「12時ちょうど」に止まる確率は？



「12時ちょうど」の幅はゼロ
→そこに止まる確率もゼロ

12時ちょうども **どこでも**
1時ちょうども **みんな**
12時1秒ちょうども **ゼロ**

なら、「12時から3時の間のどこか」もゼロ
じゃないの？

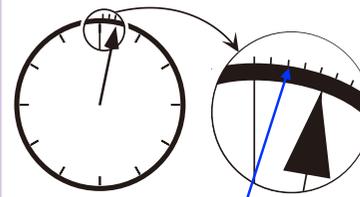
2015

11

何がおかしいのか

各刻みに止まる確率は
どれもゼロ

区間内の任意の位置
= 1つの実数で表される角度



刻みがどんなに細かくても、
順に自然数の番号がつけられる

角度を表す実数と
一対一対応がつかなら、
「区間内のどの位置に
止まる確率も0」

自然数と実数に一対一対応がつかか？
つまり「実数の集合は可算基数をもつか？」

2015

12

実数は可算無限ではない

自然数と実数に一対一対応がつくか？
つまり「実数の集合は可算基数をもつか？」

いいえ。

実数を1つ、2つ、3つと
数えることはできない

実数も自然数もその「個数」は無限だが、
実数は自然数よりも本質的に大きな無限

カントールの対角線論法

仮に、すべての実数を1番、2番、…と番号をつけて並べられるとする

1番	0.	1	2	3	4	5	6	...
2番	0.	8	9	3	1	2	9	...
3番	0.	2	3	0	4	9	0	...
⋮								

対角線上の数字を
並べた実数をつくる
↓ ↓ ↓ ↓ ↓
0.190...
↓ ↓ ↓ ↓ ↓
0.201...
各ケタを
1ずつずらす

カントールの対角線論法

すべての実数を1番、2番、…と番号をつけて並べた表

1番	0.	1	2	3	4	5	6	...
2番	0.	8	9	3	1	2	9	...
3番	0.	2	3	0	4	9	0	...
⋮								

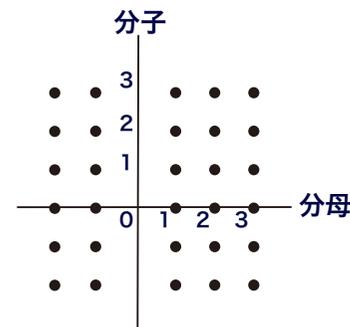
各ケタを
1ずつ
ずらした数
0.201...

この数字は、
1番の数字とは1ケタめで、
2番の数字とは2ケタめで、…
n番の数字とはnケタめで
1だけずれているので、
「すべての実数を並べた」表に
ない ∴矛盾

つまり
「実数は可算でない」

問題1

有理数は、可算基数をもつか



分母を横軸、
分子を縦軸とすると、
有理数は図の黒点
(格子点)

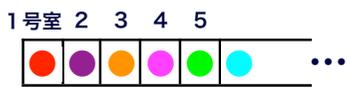
※分母0の点は除く

すべての格子点を一筆でたどれば
自然数と一対一対応がつく

問題2

ホテル無限には、可算無限個の部屋がある

「ただいま
満室です」



さらに \aleph_0 可算無限人の客がやって来たら？



2015

17

問題2

ホテル無限には、可算無限個の部屋がある

「ただいま
満室です」



さらに \aleph_0 可算無限人の客がやって来たら？

部屋にいる客全員が
2倍の番号の部屋に
移れば
奇数番の室が空く 奇数も可算無限個 \aleph_0



2015

18

今日のまとめ

「可算無限」

無限にも、大小がある

次回は「実数」とは何かを
説明します。

2015

19