

2015年度秋学期 応用数学（解析） 第2回

第1部・「無限」の理解  
無限にも大小がある

浅野 晃  
関西大学総合情報学部



1

無限とは  
「モノ」ではなく「コト」

2

「 $\infty$ 」という数字があるのか

「 $\infty$ 」という数字はありません

無限とは

「無限」という「モノ」があるのではなく  
「無限であるコト」

数学では、「コト」ではなく  
「モノ」のほうが扱いやすい。

「無限」を具体的な数字で扱うには？

3

「数えられる」無限

1, 2, 3, ... ←そして、「無限」

自然数とは、数えるための数字

自然数の集合と同じ無限を

「数えられる無限」すなわち

[可算無限] という

その「個数」は [可算基数]  $\aleph_0$  (アレフゼロ)  
(よく「可算無限個」という)

4

## どうやって数えるのか

自然数と対応がつく集合は数えられる

自然数 1, 2, 3, ...    1対1対応がつく  
          ↓ ↓ ↓ ↓            ( [全単射] が  
集合A = {a, b, c, ...}    存在する) なら

この集合の [基数] ( [濃度] ) は  $\aleph_0$   
[可算無限集合] という

## 偶数の集合の濃度は

偶数と自然数とは対応がつくか

自然数 1, 2, 3, ..., n, ...  
          ↓ ↓ ↓ ↓            ↓  
偶数 2, 4, 6, ..., 2n, ...

1対1対応がつく  
(全単射が存在する)

偶数の基数も  $\aleph_0$

自然数と「個数」は同じ

## 「ホテル無限」

## ヒルベルトの「ホテル無限」

ホテル無限には、可算無限個の部屋がある

「ただいま 満室です」  
1号室 2 3 4 5 ...  


さらに客が一人やって来たら？

部屋にいる客全員が  
隣の部屋に移れば  
1号室が空く

1号室 2 3 4 5 ...  


## 実数の基数と 対角線論法

9

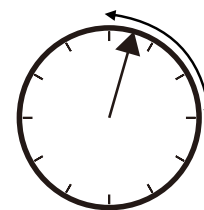
## 時計の針の止まる場所

### 連続的に針が進む時計

ボタンを押すと、その場で針が止まる

目をつぶって

ボタンを押したとき



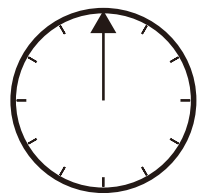
12時から3時の間のどこかに  
止まる確率  
=円周の1/4だから、確率も1/4

2015

10

## 時計の針の止まる場所

では「12時ちょうど」に止まる確率は？



「12時ちょうど」の幅はゼロ  
→そこに止まる確率もゼロ

12時ちょうども **どこでも**  
1時ちょうども **みんな**  
12時1秒ちょうども **ゼロ**

なら、「12時から3時の間のどこか」もゼロ  
じゃないの？

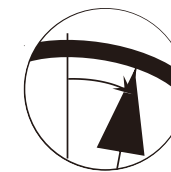
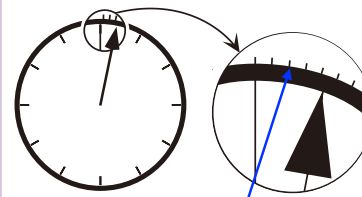
2015

11

## 何がおかしいのか

各刻みに止まる確率は  
どれもゼロ

区間内の任意の位置  
= 1つの実数で表される角度



刻みがどんなに細かくても、  
順に自然数の番号がつけられる

角度を表す実数と  
一対一対応がつかなら、  
「区間内のどの位置に  
止まる確率も0」

自然数と実数に一対一対応がつか？  
つまり「実数の集合は可算基数をもつか？」

2015

12

## 実数は可算無限ではない

自然数と実数に一対一対応がつくか？  
つまり「実数の集合は可算基数をもつか？」

いいえ。

実数を1つ、2つ、3つと  
数えることはできない

実数も自然数もその「個数」は無限だが、  
実数は自然数よりも本質的に大きな無限

## カントールの対角線論法

仮に、すべての実数を1番、2番、…と番号をつけて並べられるとする

1番	0.	1	2	3	4	5	6	...
2番	0.	8	9	3	1	2	9	...
3番	0.	2	3	0	4	9	0	...
⋮								

対角線上の数字を  
並べた実数をつくる

↓ ↓ ↓ ↓ ↓

0.190...  
0.201... 各ケタを  
1ずつずらす

## カントールの対角線論法

すべての実数を1番、2番、…と番号をつけて並べた表

1番	0.	1	2	3	4	5	6	...
2番	0.	8	9	3	1	2	9	...
3番	0.	2	3	0	4	9	0	...
⋮								

各ケタを  
1ずつ  
ずらした数

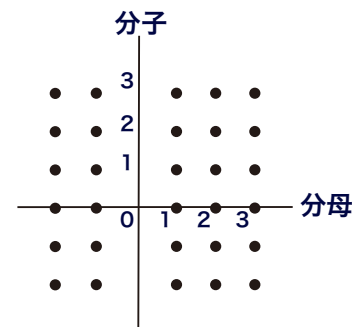
0.201...

この数字は、  
1番の数字とは1ケタめで、  
2番の数字とは2ケタめで、…  
n番の数字とはnケタめで  
1だけずれているので、  
「すべての実数を並べた」表に  
ない ∴矛盾

つまり  
「実数は可算でない」

## 問題1

有理数は、可算基数をもつか



分母を横軸、  
分子を縦軸とすると、  
有理数は図の黒点  
(格子点)

※分母0の点は除く

すべての格子点を一筆でたどれば  
自然数と一対一対応がつく

## 問題2

ホテル無限には、可算無限個の部屋がある

「ただいま  
満室です」



さらに $\aleph_0$ 可算無限人の客がやって来たら？



2015

17

## 問題2


ホテル無限には、可算無限個の部屋がある

「ただいま  
満室です」



さらに $\aleph_0$ 可算無限人の客がやって来たら？

部屋にいる客全員が  
2倍の番号の部屋に  
移れば  
奇数番の室が空く 奇数も可算無限個  $\aleph_0$



2015

18

## 今日のまとめ

「可算無限」

無限にも、大小がある

次回は「実数」とは何かを  
説明します。

2015

19