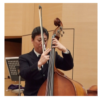
2015年度秋学期　応用数学（解析）　第３回

第1部・「無限」の理解

実数とは何か

浅野　晃

関西大学総合情報学部



拡張されていく「数」

拡張されていく「数」

…, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, …

自然数

整数

有理数

実数

…, 2/3, 1/2, 1/3, …　有限小数と循環する無限小数

$\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$

π, e

循環しない無限小数

無理数

今日扱うのは

「実数の連続性を示す方法」

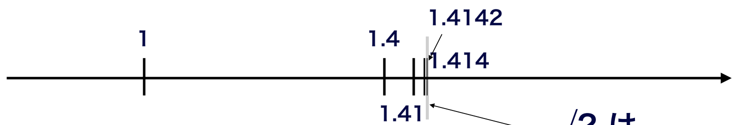
いくつか挙げますが，どれも等価です

2015

無限小数と
カントールの公理

点と区間

「循環しない無限小数」は，
数直線上の一つの「点」なのか？



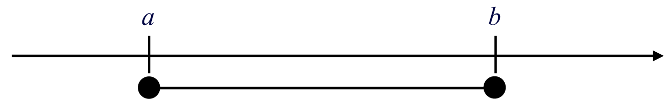
√2 は
「このへん」

√2 は
本当に「点」か？
よくわからない…

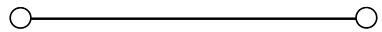
点ではなく［区間］で考える

閉区間と開区間

$a < b$ のとき，
a と b の間にある数の集合→［区間］



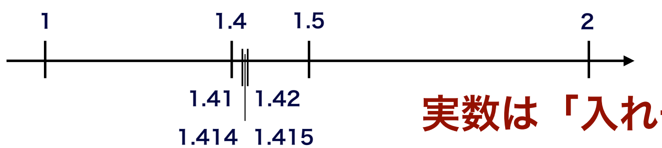
両端を含む　［閉区間］$[a, b]$
最小値はa，最大値はb



両端を含まない　［開区間］(a, b)
最小値・最大値が存在するかどうかは，数の種類による

カントールの公理

循環しない無限小数 √2 = 1.4142135…
無限に桁数を増やすと，
ひとつの実数を表せるのか？



$[1, 2]$
$[1.4, 1.5]$
$[1.41, 1.42]$
$[1.414, 1.415]$
⋮

実数は「入れ子」の
閉区間の極限

その極限が√2 = 1.4142135…

実数と
デデキントの切断

デデキントの切断

数直線を，ある場所で切断し，
数の集合を「大きい方」と「小さい方」
にわける

（ある集合の）すべての数を，
一方の組のどの数も
もう一方の組のどの数よりも小さくなるように，
２つの組に分ける

「小さい方」 切断 「大きい方」

整数の切断

整数の場合

「小さい方」
0
最大値がある

「大きい方」
1
最小値がある

隙間ができる

有理数の切断

有理数の場合

「小さい方」の最大値がない
1よりも小さく
1にいくらでも近い有理数が存在する

「小さい方」 「大きい方」
1（有理数）
最小値がある
跳びができる

「大きい方」の最小値がない
1よりも大きく
1にいくらでも近い有理数が存在する

[稠密性]

「小さい方」 「大きい方」
1
最大値がある
跳びができる

有理数の切断

有理数の場合
こういう場合もある

√2（無理数）

「小さい方」 「大きい方」
最大値がない 最小値がない
跳びができるが

√2よりも小さく
√2にいくらでも近い有理数も

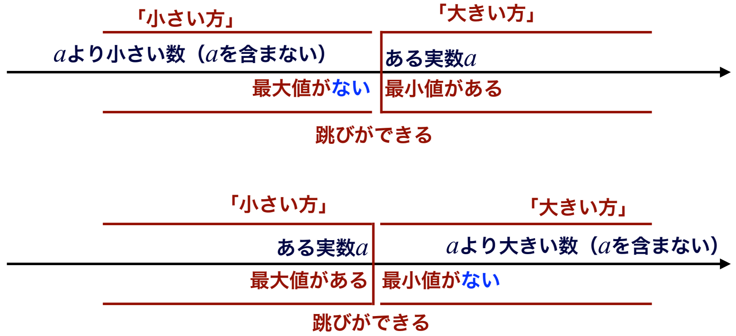
√2よりも大きく
√2にいくらでも近い有理数も

どちらも存在する

「稠密」とは，
いくらでも細かく
「びっしり」と
毛の植わっている
ブラシのようなもの

実数の切断

実数は，必ずこのどちらかになる　稠密な上に［連続性］



実数とは，「切断の切り口」である

「連続」とは，「べったり」と塗り付けられた塗料のようなもの

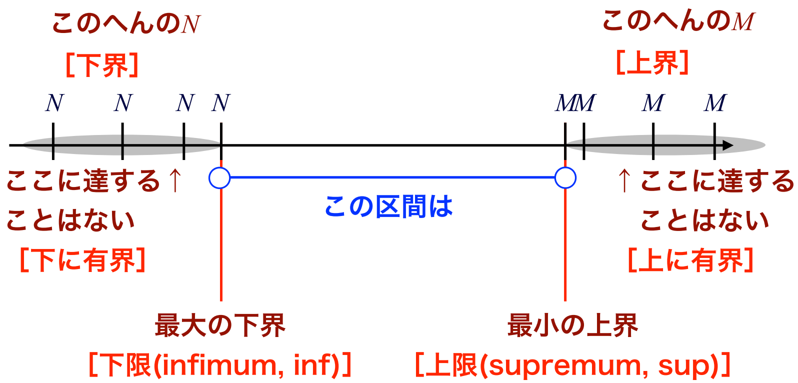
A. Asano, Kansai Univ.　2015

上限と下限
ワイエルシュトラスの定理

A. Asano, Kansai Univ.

有界，上界・下界，上限・下限

開区間には最大値も最小値もないが，
上にも下にも限界はある



A. Asano, Kansai Univ.　2015

ワイエルシュトラスの定理

実数からなる集合が下（上）に有界ならば
必ず下限（上限）が存在する　デデキントの切断から導ける

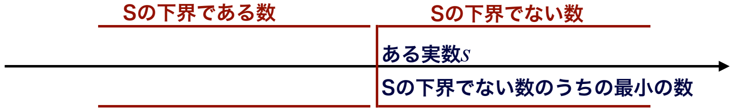
実数からなるある集合Sが，下に有界とすると，

どちらかの切断を形成し，実数sが定まる。
下の切断なら，下限が存在する。上の切断にならないことを示す

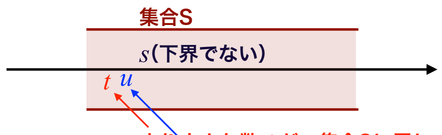
A. Asano, Kansai Univ.　2015

ワイエルシュトラスの定理

こちらの切断だとすると



実数 s は，Sの下界でない数だから，集合Sを見ると



s より小さな数 t が，集合Sに属しているはず

s と t の間にある数 u も，集合Sに属しているはず

u は t より大きいから，u は「集合Sの下界ではない数」である

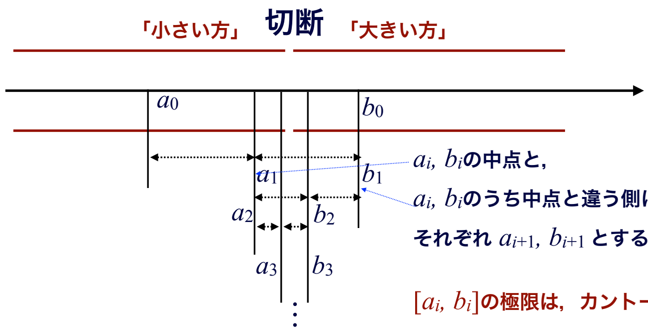
s は u より大きい。

これは，「s は 集合Sの下界ではない数のうちで最小」に矛盾

実数を定義する
各公理・定理間の関係

カントールの公理とデデキントの切断

カントールの公理によって定まる実数は，
デデキントの切断によって切り口に現れる実数と同じか？



a_i, b_iの中点と，

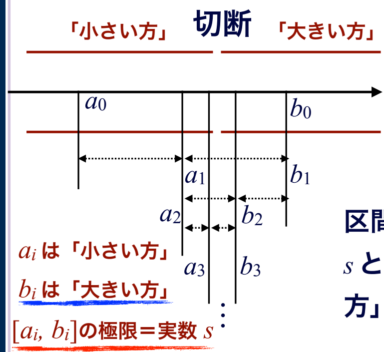
a_i, b_iのうち中点と違う側にある点を，

それぞれ a_{i+1}, b_{i+1} とする

$[a_i, b_i]$の極限は，カントールの公理により，１つの実数 s を定める

この s は，デデキントの切断による「切り口」にあるか？

カントールの公理とデデキントの切断



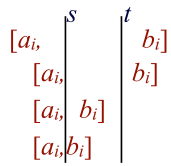
s が「小さい方」に属するとする

s より大きい数 t については

どんなに t が s に近くても

区間$[a_i, b_i]$がs に到達する途中で

s と t の間に区間の右端（「大きい方」）が入るときがあるはずだから，



t は「大きい方」に属する

s は「小さい方」の最大値である。

「大きい方」に最小値はない

実数の連続性を示すさまざまな公理

カントールの公理　実数は入れ子の閉区間の極限

デデキントの切断による公理

実数は切断の「切り口」

ワイエルシュトラスの定理

実数の集合が有界ならば，上限か下限がある

実数の有界な単調数列は収束する

（これは次回）

いずれも同値である

連続性裁判

～こんな数学，何か役に立つの？～

連続性裁判

映画の著作権

公開から50年後の年の年末まで有効

→2004年1月1日から「70年」に延長

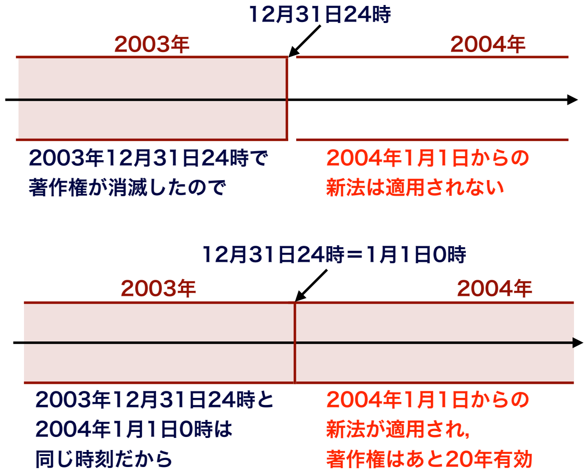
**1953年公開の映画の著作権は
どうなる？**

連続性裁判

1953年公開の映画の著作権は

ビデオ業者の言い分

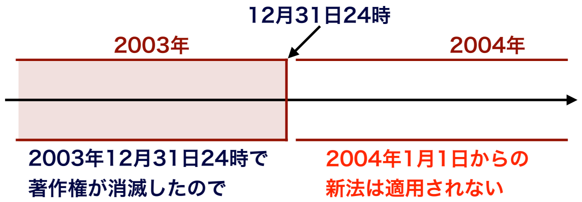
文化庁の言い分



裁判の結果は

「2003年12月31日24時と2004年1月1日0時は
別の時刻である」

ビデオ業者の
言い分



こちらが認められた。

「時の流れは連続」

今日のまとめ

実数の「連続性」

実数の連続性を示す方法

カントールの公理
デデキントの切断による公理
ワイエルシュトラスの定理