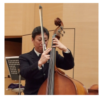
2015年度秋学期　応用数学（解析）　　第４回

第1部・「無限」の理解

収束とは何か，ε-δ 論法

浅野　晃
関西大学総合情報学部



微分を習ったときの説明

何かだまされている気がする

微分の説明

関数 $f(x) = x^2$ の微分

$$\begin{aligned}\frac{df(x)}{dx} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x\end{aligned}$$

h はゼロに近づいているだけで，ゼロではないから，分母分子を h で割る

やっぱり h はゼロ

これっておかしくありませんか？

収束＝「限りなく近づく」ことの意味

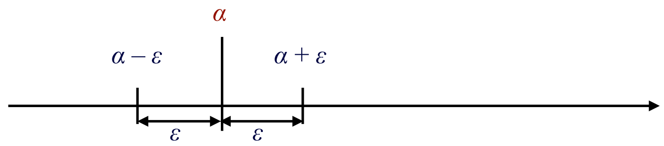
A. Asano, Kansai Univ.

数列の収束の定義

数列$\{a_n\}$が α に収束するとは

α のまわりにどんなに狭い区間

$[\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon]$を設定しても$(\varepsilon > 0)$



A. Asano, Kansai Univ.

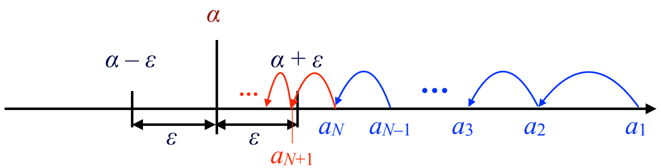
数列の収束の定義

数列$\{a_n\}$が α に収束するとは

数列が十分大きな番号 N まで進めば

N 番より大きな番号 n については,

a_nはみなその狭い区間$[\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon]$に入る



A. Asano, Kansai Univ.

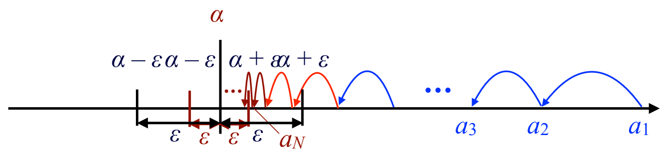
数列の収束の定義

数列$\{a_n\}$が α に収束するとは

数列が十分大きな番号 N まで進めば

N 番より大きな番号 n については,

a_nはみなその狭い区間$[\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon]$に入る



εをどんなに小さくしても　そういうNがある

A. Asano, Kansai Univ.

数列の収束の定義

数列$\{a_n\}$が α に収束するとは

α のまわりにどんなに狭い区間

$[\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon]$を設定しても$(\varepsilon>0)$

数列が十分大きな番号 N まで進めば

N 番より大きな番号 n については，

a_nはみなその狭い区間$[\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon]$に入る

$\varepsilon-N$ 論法

$$\forall\varepsilon>0, \exists N; n>N \Rightarrow |a_n-\alpha|<\varepsilon$$

数列の発散の定義

数列$\{a_n\}$が ∞ に発散する

どんなに大きな数 G を持ってきても，

数列が十分大きな番号 N まで進めば

N 番より大きな番号 n については，

a_nはみな G より大きくなる

$$\forall G, \exists N; n>N \Rightarrow a_n>G$$

収束や発散は「無限」なのか

「無限」とはひとことも言っていない

どんなに狭い区間$[\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon]$

どんなに大きな数 G

十分大きな番号 N

どれも「無限」ではなく有限

ただし，求めに応じて
好きなだけ狭く・大きくできる

実数の連続性と収束

実数の連続性と収束

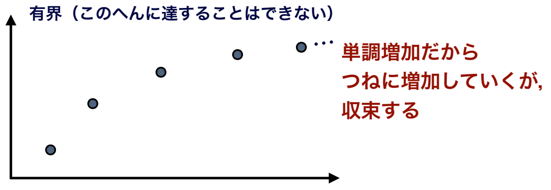
実数の連続性を述べる公理の，４つめの表現

実数の有界な単調数列は収束する

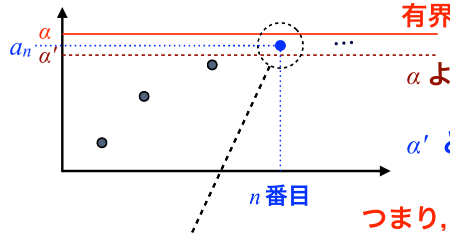
数列$\{a_n\}$が

「単調増加」とは，$a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots$

「単調減少」とは，$a_1 > a_2 > \ldots > a_n > \ldots$



ワイエルシュトラスの定理から証明

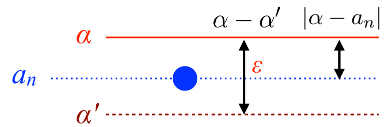


有界だから，上限 α が存在する

α より小さい α' を考えると

α' と α の間に来る a_n がある

つまり，



α' はどれだけ

α に近くてもよい

$$|\alpha - a_n| < \underline{\alpha - \alpha'}$$

これを$\varepsilon(>0)$と考えると

α からの隔たり ε をどんなに小さく設定しても，

そこに入る a_n がある

$\{a_n\}$ は α に収束する

数列の収束に関する例題

例題

$a > 0$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ を証明せよ。

$\dfrac{a^k}{k!} = C$ と置く。番号 k は，$k > 2a$ であるとする。

$n > k$ となる番号 n について，

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a^k}{k!} \times \frac{a}{k+1} \times \frac{a}{k+2} \times \cdots \times \frac{a}{n}$$

$$= C \times \frac{a}{k+1} \times \frac{a}{k+2} \times \cdots \times \frac{a}{k+(n-k)}$$

例題

$n > k$ となる番号 n について，

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a^k}{k!} \times \frac{a}{k+1} \times \frac{a}{k+2} \times \cdots \times \frac{a}{n}$$

$$= C \times \frac{a}{k+1} \times \frac{a}{k+2} \times \cdots \times \frac{a}{k+(n-k)}$$

$k > 2a$ なので

$$\frac{a^n}{n!} < C \times \frac{a}{2a+\cancel{1}} \times \frac{a}{2a+\cancel{2}} \times \cdots \times \frac{a}{2a+\cancel{(n-k)}}$$

$$< C \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \frac{C \cdot 2^k}{2^n} < \frac{C \cdot 2^k}{n}$$

そこで，どんな小さな $\varepsilon(>0)$ についても，

番号 n が $n > \dfrac{C \cdot 2^k}{\varepsilon}$ であれば $\dfrac{a^n}{n!} < \varepsilon$

つまり

$\{a^n/n!\}$ は 0 に

収束する

関数の極限

関数の極限

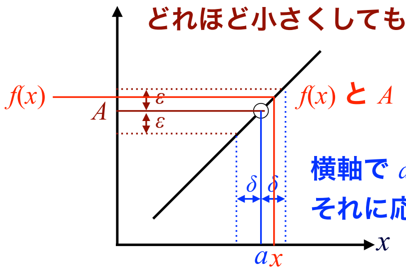
数列の収束と同じ論法を用いる

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

関数 $f(x)$ の $x \to a$ の極限が A であるとは

縦軸で A との隔たり ε を

どれほど小さくしても



$f(x)$ と A との隔たりも ε より小さい

横軸で a との隔たり δ を

それに応じて小さくすれば

x と a との隔たりが δ より小さければ

関数の極限

どんなに小さな ε を考えても$(\varepsilon > 0)$

x と a との隔たりを δ より小さくすれば

$f(x)$ と A の隔たりも ε より小さくできる

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

$\varepsilon - \delta$ 論法

ε も δ も，ただの正の数で，0ではないし，

0に「無限に」近づくわけでもない

最初の微分の例

$h \to 0$ と書いてあっても，

h はあくまで正の数で，0ではない

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x$$

hはゼロに近づいているだけで，
ゼロではないから，
分母分子をhで割る

やっぱりhはゼロ　ではなくて

収束する先が $h=0$ を代入したときの値と同じ，というだけ

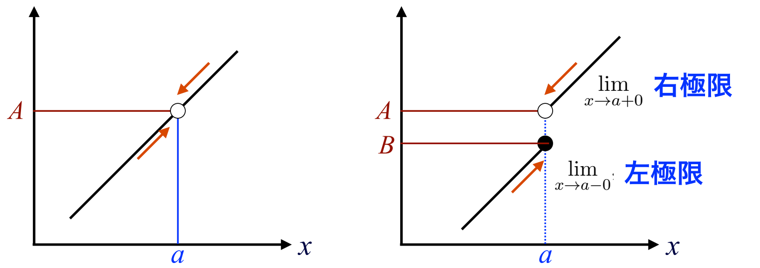
A. Asano, Kansai Univ.

左極限と右極限

$$\lim_{x\to a} f(x) = A$$

関数 $f(x)$ の $x\to a$ の極限が A であるとは

xが大きい方からaに近づいても
小さい方からaに近づいても，どちらの極限もA



A. Asano, Kansai Univ.

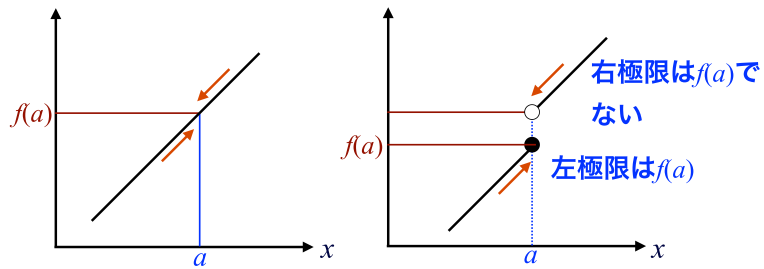
関数の「連続」と「一様連続」

A. Asano, Kansai Univ.

関数の連続性

関数 $f(x)$ が $x=a$ で連続であるとは

関数 $f(x)$ の $x\to a$ の極限が $f(a)$ であること



a で連続　　a で不連続

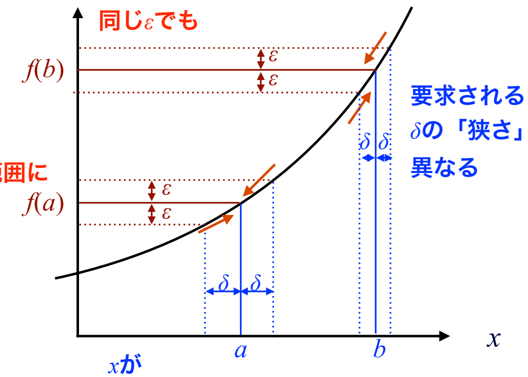
区間 I のどの点でも連続なら「区間 I で連続」

A. Asano, Kansai Univ.

A. Asano, Kansai Univ.

$\varepsilon - \delta$ 論法で話をすると

同じεでも



$f(x)$が
$f(a)$の上下εの範囲に
入るには

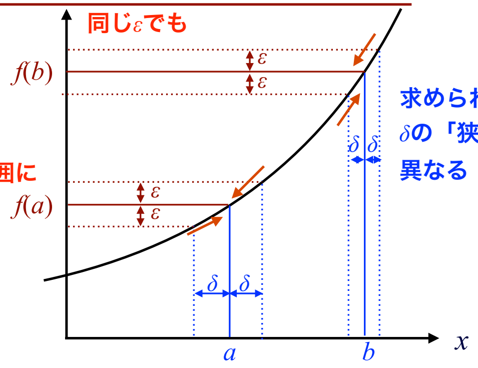
要求される
δの「狭さ」は
異なる

xが
aの左右δの範囲に
入ればよい

A. Asano, Kansai Univ.

一様連続

同じεでも



$f(x)$が
$f(a)$の上下εの範囲に
入るには

求められる
δの「狭さ」は
異なる

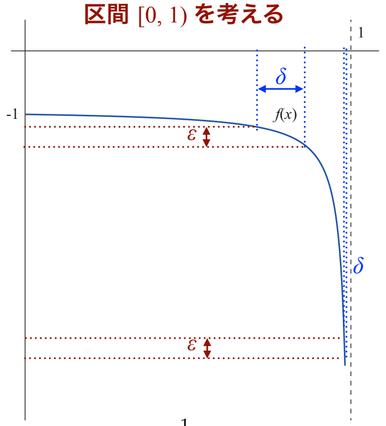
xがaの左右δの範囲に入ればよい

この場合は「狭い方の δ」をどこででも用いればよい
どの点でも「共通の δ」を用いれば連続といえるとき
［一様連続］という

A. Asano, Kansai Univ.

連続だが一様連続でない例

区間 $[0, 1)$ を考える



$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

xが1に近づくと
$f(x)$はいくらでも大きく
変化する

要求される
δの「狭さ」は
いくらでも狭くなる

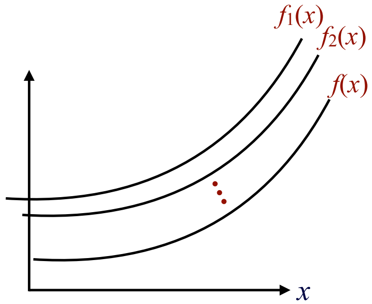
区間内で
「共通のδ」は
存在しない

A. Asano, Kansai Univ.

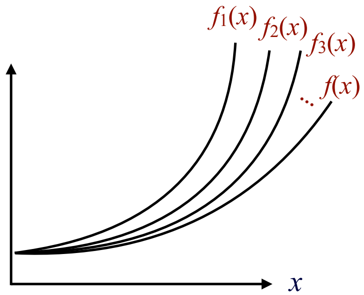
関数列の収束

A. Asano, Kansai Univ.

関数列の収束と「一様収束」



区間内の各点で,
$f_n(x)$と$f(x)$の隔たりが
0に近づく
［各点収束］



左のほうでは収束していくが
いくらでも右に行けば
いつまでたっても
収束しない

［一様収束］でない

A. Asano, Kansai Univ.

今日のまとめ

「限りなく近づく」とは,
「無限」ではない

求めに応じて
好きなだけ近くできること