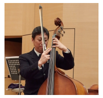
2015年度秋学期　応用数学（解析）　　第６回

第２部・基本的な微分方程式

# 変数分離形の変形

浅野　晃
関西大学総合情報学部





# 変数分離形（復習）



## 変数分離形

**一般には** $g(x)x' = f(t)$

$x' = \dfrac{dx}{dt}$ とすると　$g(x)dx = f(t)dt$

両辺それぞれを
積分すると $\displaystyle \int g(x)dx = \int f(t)dt + C$

一般解に含まれる積分定数 $C$ は，
初期値を代入して定まり，特殊解が得られる

**今日は，変形によって変数分離形に持ち込める方程式です**



# 1．同次形

# 同次形

**一般には** $\dfrac{dx}{dt} = f\left(\dfrac{x}{t}\right)$　$x/t$ **の式になっている**

$\dfrac{x}{t} = u$ **とおくと** $x = ut$ **この両辺を微分** $\dfrac{dx}{dt} = t\dfrac{du}{dt} + u$

**積の微分**

**よって** $t\dfrac{du}{dt} + u = f(u)$

$$\frac{1}{f(u) - u}du = \frac{1}{t}dt$$

**変数分離形になった**

A. Asano, Kansai Univ.

2015年度秋学期



# 同次関数

**関数** $M(x, t)$ **が** $k$ **次の同次関数であるとは**

$M(ut, t) = t^k M(u, 1)$ **の形になっていること**

$t^k$ **をくくり出せる**

**微分方程式が** $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{M(x,t)}{N(x,t)}$ **の形で**

$M, N$ **がどちらも** $k$ **次の同次関数なら，** $x = ut$ **とおいて**

$$\frac{dx}{dt} = \frac{M(x,t)}{N(x,t)}$$

$$= \frac{t^k M(u,1)}{t^k N(u,1)} = \frac{M(u,1)}{N(u,1)} = \frac{M(\frac{x}{t},1)}{N(\frac{x}{t},1)}$$

**前ページの形になる**

A. Asano, Kansai Univ.

2015年度秋学期



# 例題

$x' = \dfrac{t-x}{t+x}$ **を解いて，一般解を求めよ。**

**分母分子を** $t$ **でわると** $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1-\frac{x}{t}}{1+\frac{x}{t}}$ **同次形**

$\dfrac{x}{t} = u$ **とおくと** $x = ut$ **より** $\dfrac{dx}{dt} = t\dfrac{du}{dt} + u$

**よって** $t\dfrac{du}{dt} + u = \dfrac{1-u}{1+u}$

$$\frac{1}{\frac{1-u}{1+u} - u}du = \frac{1}{t}dt$$

$t$ **と** $u$ **を分離**

$$\frac{u+1}{u^2+2u-1}du = -\frac{1}{t}dt$$

A. Asano, Kansai Univ.

2015年度秋学期



# 例題

$x' = \dfrac{t-x}{t+x}$ **を解いて，一般解を求めよ。**

**微分の関係になっている**

$$\frac{u+1}{u^2+2u-1}du = -\frac{1}{t}dt$$

**ここで** $u^2 + 2u - 1$ **の微分が** $2(u+1)$ **になるから，**
**上の式の両辺を積分すると**

$$\frac{1}{2}\log(|u^2+2u-1|) = -\log|t| + C$$

$$\log(|u^2+2u-1|) = \log(A|t|^{-2})$$

$$t^2(u^2+2u-1) = A$$

**対数の和→真数の積**

**対数の○倍→真数の○乗**

**定数は任意なので，絶対値が外れる**

$u = \dfrac{x}{t}$ **に戻すと** $x^2 + 2tx - t^2 = A$

A. Asano, Kansai Univ.

2015年度秋学期

A. Asano, Kansai Univ.

# 2．１階線形



A. Asano, Kansai Univ.

## １階線形微分方程式

一般には $\dfrac{dx}{dt} + P(t)x = Q(t)$ の形になっているもの

$p(t) = \exp\left(\int P(t)dt\right)$ と置くと，

一般解は $x = \dfrac{1}{p(t)}\left(\int p(t)Q(t)dt + C\right)$

なぜならば

$$
\begin{aligned}
(p(t)x)' &= (p(t))'x + p(t)x' && \text{積の微分}\\
&= \left[\exp\left(\int P(t)dt\right)\right]' x + p(t)x' \\
&= p(t)P(t)x + p(t)x' && \text{指数の合成関数の微分}\\
&= p(t)\left\{P(t)x + x'\right\} = p(t)Q(t)
\end{aligned}
$$

よって，両辺を積分して $p(t)x = \int p(t)Q(t)dt + C$



A. Asano, Kansai Univ.

## 例題

$x' + x = t$ を解いて，一般解を求めよ。

$\dfrac{dx}{dt} + P(t)x = Q(t)$ にあてはめると $P(t) \equiv 1,\ Q(t) = t$

よって $p(t) = \exp\left(\int P(t)dt\right)$ とすると $p(t) = \exp\left(\int 1dt\right) = e^t$

前ページの式から $p(t)x = \int p(t)Q(t)dt + C$

部分積分

$$
\begin{aligned}
e^t x &= \int e^t t dt + C \\
&= e^t t - \int e^t dt + C \\
&= e^t t - e^t + C \\
x &= t - 1 + Ce^{-t}
\end{aligned}
$$



A. Asano, Kansai Univ.

# 2′．ベルヌーイの微分方程式

# ベルヌーイの微分方程式

**一般には** $\dfrac{dx}{dt} + P(t)x = Q(t)x^n$ **の形** $(n \neq 1)$

$u = x^{1-n}$ **とおくと１階線形微分方程式に変形できる**

**なぜならば**

$$\frac{1}{x}x' + P(t) = Q(t)x^{n-1}$$

$$\log u = (1-n)\log x$$

両辺を微分する

$$\frac{u'}{u} = (1-n)\frac{x'}{x}$$

代入

$$\frac{1}{1-n}\frac{u'}{u} + P(t) = Q(t)\frac{1}{u}$$

$$u' + (1-n)P(t)u = (1-n)Q(t)$$ １階線形

A. Asano, Kansai Univ.



# 今日のまとめ

同次形

１階線形

ベルヌーイ

A. Asano, Kansai Univ.