

2 階線形微分方程式は、力学における振動を表す方程式など、さまざまな科学に現れる重要な方程式です。この講義では、一般的な線形微分方程式における理論にもふれながら、2 回にわたって説明することになります。

## 2 階線形微分方程式とは

関数  $x(t)$  についての **2 階線形微分方程式** とは、次の形のものをいいます。

$$x'' + P(t)x' + Q(t)x = R(t) \quad (1)$$

このうち、右辺が恒等的に 0 であるものを **斉次**、そうでないものを **非斉次** の方程式といいます。

もっとも簡単な 2 階線形微分方程式は、 $P(t)$  や  $Q(t)$  が定数の斉次方程式で、 $a, b$  を定数として

$$x'' + ax' + bx = 0 \quad (2)$$

と表されます。

この方程式の解として、まず  $x \equiv 0$  が浮かびます。これは **自明解** とよばれています。また、かりに  $x(t) = e^{\lambda t}$  としてみて、これを方程式に代入してみると

$$\begin{aligned} \lambda^2 e^{\lambda t} + a\lambda e^{\lambda t} + be^{\lambda t} &= 0 \\ (\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda t} &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

となりますから、 $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$  を満たす  $\lambda$  について、 $x(t) = e^{\lambda t}$  は解 ( $t = 0$  のとき  $x(0) = 1$  となる特殊解) です。また、その定数倍も解です。

さらに、 $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$  は  $\lambda$  の 2 次方程式ですから、これを満たす  $\lambda$  はたいてい 2 つあります。よって、これらを  $\lambda_1, \lambda_2$  とすると、 $x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$  ( $C_1, C_2$  は定数) が解ということになります。 $C_1 = C_2 = 0$  とすると  $x(t) \equiv 0$  になりますから、この解は自明解を含んでいます。

## こんなんでいいのでしょうか

さっき求めた  $C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$  という解は、一般解のように見えますが、本当にそうなのでしょうか。なにしろ、この解は  $x(t) = e^{\lambda t}$  と勝手において求めた解なのです。

この解が一般解であるということは、次の 2 つが正しいことと同じです。

1. この微分方程式の解が一意であること。すなわち、初期値  $x(t_0), x'(t_0)$  を定めると解がひとつに定まること。
2. この微分方程式の 1 次独立な 2 つの特殊解を  $x_1(t), x_2(t)$  とするとき、 $C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t)$  ( $C_1, C_2$  は定数) がこの方程式の一般解になっていること。

2. について、「2 つの関数が 1 次独立」というのは、 $C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) = 0$  がすべての  $t$  について満たされるのは  $C_1 = C_2 = 0$  のときだけである、という意味です。2. は、線形代数の言葉では「この方程式の解全体は、2 次元ベクトル空間をなす」と言います。

この2つの条件が正しければ、さきほど勝手に  $x(t) = e^{\lambda t}$  とおいて求めた解でも、 $\lambda_1 \neq \lambda_2$  であれば  $e^{\lambda_1 t}$  と  $e^{\lambda_2 t}$  は明らかに1次独立ですから、 $\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$  の形で一般解が表され、他の解はない、ということになります。

### 線形微分方程式に関する定理

上の2つの条件は、2階線形微分方程式だけでなく、一般の斉次形  $n$  階微分方程式についてなりたつことが知られています。しかも、定数係数でない場合にもなりたちます。そこで、何階線型微分方程式でも同じ形で表せる方法をまず考えます。

(1) 式の2階線形微分方程式は、 $x_1 = x, x_2 = x'$  とおくと、

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= -Q(t)x_1 - P(t)x_2 + R(t) \end{aligned} \quad (4)$$

という連立微分方程式となります。この式は行列とベクトルを使って

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -Q(t) & -P(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ R(t) \end{pmatrix} \quad (5)$$

と表せますから、

$$\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t) \quad (6)$$

という、ベクトルについての1階線形微分方程式で表すことができます。一般の  $n$  階線形微分方程式も、同様の操作によって(6)式の形で表すことができます。

**条件1. かなりたつことの証明** まず、1.の解の一意性について、証明の概略を示します。これは斉次形でなくてもなりたちます。

ここで、行列やベクトルの大きさを表す「ノルム」を記号  $\|\cdot\|$  で表します。例えば、「要素の2乗の合計のルート」はノルムの一種で、ユークリッドノルムといいます。

(6)式の右辺について、

$$\|(A(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)) - (A(t)\mathbf{y} + \mathbf{b}(t))\| = \|A(t)\mathbf{x} - A(t)\mathbf{y}\| \leq \|A(t)\| \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad (7)$$

となるノルムが存在します。たとえば、ユークリッドノルムではそうなります。そこで、問題の関数を連続関数とすると、それを考えている区間内の任意の有界閉区間に対しては、ノルムが連続であることから  $\|A(t)\|$  には上限が存在します。

このことは、(6)式の1階微分方程式について、Lipschitz条件（講義第5回参照）が成り立っていることを示しています。したがって、この微分方程式の解は一意です。■

**条件2. かなりたつことの証明** 次に、斉次形の方程式  $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$  について、2.の「解が  $n$  次元ベクトル空間をなす」ことの証明を示します。

$n$  階の方程式の場合、ベクトル  $\mathbf{x}$  は  $n$  次元です。そこで、 $n$  次元の基本ベクトル

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (1, 0, \dots, 0) \\ \mathbf{e}_2 &= (0, 1, \dots, 0) \\ &\vdots \\ \mathbf{e}_n &= (0, 0, \dots, 1) \end{aligned} \quad (8)$$

を考えて,

$$\begin{aligned} \text{初期値 } \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{e}_1 \text{ をみたす } \boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x} \text{ の特殊解を } \boldsymbol{\xi}_1(t), \text{ すなわち } \boldsymbol{\xi}_1(t_0) = \boldsymbol{e}_1 \\ \text{初期値 } \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{e}_2 \text{ をみたす特殊解を } \boldsymbol{\xi}_2(t), \text{ すなわち } \boldsymbol{\xi}_2(t_0) = \boldsymbol{e}_2 \\ \vdots \\ \text{初期値 } \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{e}_n \text{ をみたす特殊解を } \boldsymbol{\xi}_n(t), \text{ すなわち } \boldsymbol{\xi}_n(t_0) = \boldsymbol{e}_n \end{aligned} \quad (9)$$

とします。

$\boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x}$  の一般解を  $\boldsymbol{x}(t)$  とすると,  $t = t_0$  のときの任意の初期値は

$$\boldsymbol{x}(t_0) = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n \quad (10)$$

の形で表すことができます。

一方, 特殊解  $\boldsymbol{\xi}_1(t), \boldsymbol{\xi}_2(t), \dots, \boldsymbol{\xi}_n(t)$  は 1 次独立です。なぜならば,

$$c_1\boldsymbol{\xi}_1(t) + c_2\boldsymbol{\xi}_2(t) + \cdots + c_n\boldsymbol{\xi}_n(t) = \mathbf{0} \quad (11)$$

がなりたっているとする時,  $t = t_0$  でもなりたつので代入すると,

$$\begin{aligned} c_1\boldsymbol{\xi}_1(t_0) + c_2\boldsymbol{\xi}_2(t_0) + \cdots + c_n\boldsymbol{\xi}_n(t_0) = \mathbf{0} \\ (9) \text{ 式より } c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{e}_n = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (12)$$

となります。 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$  は 1 次独立ですから, これがなりたつのは  $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$  のときです。よって  $\boldsymbol{\xi}_1(t), \boldsymbol{\xi}_2(t), \dots, \boldsymbol{\xi}_n(t)$  も 1 次独立です。

一方, 特殊解  $\boldsymbol{\xi}_1(t), \boldsymbol{\xi}_2(t), \dots, \boldsymbol{\xi}_n(t)$  の 1 次結合  $x_1\boldsymbol{\xi}_1(t) + x_2\boldsymbol{\xi}_2(t) + \cdots + x_n\boldsymbol{\xi}_n(t)$  を考えると,  $t = t_0$  のときはやはり (9) 式から,

$$\begin{aligned} x_1\boldsymbol{\xi}_1(t_0) + x_2\boldsymbol{\xi}_2(t_0) + \cdots + x_n\boldsymbol{\xi}_n(t_0) \\ = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n \end{aligned} \quad (13)$$

となります。

このことは, 一般解  $\boldsymbol{x}(t)$  と上記の特殊解の 1 次結合  $x_1\boldsymbol{\xi}_1(t) + x_2\boldsymbol{\xi}_2(t) + \cdots + x_n\boldsymbol{\xi}_n(t)$  は, (10) 式と (13) 式により, 同じ初期条件  $t = t_0$  で同じ初期値  $x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n$  をもつ解であることを意味します。条件 1. で解の一意性が示されていますから,

$$\boldsymbol{x}(t) = x_1\boldsymbol{\xi}_1(t) + x_2\boldsymbol{\xi}_2(t) + \cdots + x_n\boldsymbol{\xi}_n(t) \quad (14)$$

となります。すなわち, 1 次独立な  $n$  個の特殊解の 1 次結合で一般解が表されます。■

---

## 定数係数の斉次形 2 階線形微分方程式を解く

もう一度, はじめにあげた定数係数の斉次形 2 階線形微分方程式  $x'' + ax' + bx = 0$  を解くことを考えます。

この微分方程式については、 $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$  を満たす  $\lambda$  について、 $x(t) = e^{\lambda t}$  は解であることは、はじめの方で述べました。この、 $\lambda$  についての2次方程式  $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$  を**特性方程式**といいます。この微分方程式の一般解は、特性方程式の解の形によって異なります。

**1. 特性方程式が2つの異なる実数解を持つ場合** この場合、2つの異なる実数解を  $\lambda_1, \lambda_2$  とすると、 $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}$  が1次独立な解なので、これらの1次結合である  $x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$  ( $C_1, C_2$  は任意の定数) が一般解となります。前節の説明のとおり、これですべての解を表しています。

**2. 特性方程式が2つの異なる虚数解を持つ場合** この場合、2つの解は  $\alpha + i\beta, \alpha - i\beta$  の形になっているので、一般解は  $x(t) = C_1 e^{(\alpha+i\beta)t} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)t}$  と表されます。この解は

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{(\alpha+i\beta)t} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)t} \\ &= e^{\alpha t} (C_1 e^{i\beta t} + C_2 e^{-i\beta t}) \\ &= e^{\alpha t} (C_1 (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)) + C_2 (\cos(\beta t) - i \sin(\beta t))) \\ &= e^{\alpha t} ((C_1 + C_2) \cos(\beta t) + i(C_1 - C_2) \sin(\beta t)) \end{aligned} \tag{15}$$

となり、定数をおきなおすと  $x(t) = e^{\alpha t} (C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t))$  という三角関数の形で表されます<sup>1</sup>。つまり、解が振動を表しています。これについては、先の講義で物理学の例をあげて説明する予定です。

**3. 特性方程式が重解を持つ場合** この場合は、特性方程式の解を  $\lambda_1$  とすると、微分方程式の解は  $C_1 e^{\lambda_1 t}$  しか出てきませんので、これと1次独立なもう一つの解をさがす必要があります。

結論からいうと、その解は  $te^{\lambda_1 t}$  です。なぜならば、

$$\begin{aligned} (te^{\lambda_1 t})' &= \lambda_1 te^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_1 t} = (\lambda_1 t + 1)e^{\lambda_1 t} \\ (te^{\lambda_1 t})'' &= \lambda_1(\lambda_1 t + 1)e^{\lambda_1 t} + \lambda_1 e^{\lambda_1 t} = (\lambda_1^2 t + 2\lambda_1)e^{\lambda_1 t} \end{aligned} \tag{16}$$

ですから、これを微分方程式の左辺に代入すると

$$\begin{aligned} &(\lambda_1^2 t + 2\lambda_1)e^{\lambda_1 t} + a\lambda_1 te^{\lambda_1 t} + bte^{\lambda_1 t} \\ &= \{\lambda_1^2 + a\lambda_1 + b\}te^{\lambda_1 t} + (2\lambda_1 + a)e^{\lambda_1 t} \end{aligned} \tag{17}$$

となります。(17)式の第1項については、 $\lambda_1$  が特性方程式の解であることから  $\{\}$  内が0となります。第2項については、特性方程式の解と係数の関係から  $2\lambda_1 = -a$  なので、 $()$  内が0となります。よって、 $te^{\lambda_1 t}$  は微分方程式の解であり、また明らかに  $e^{\lambda_1 t}$  とは1次独立ですから、一般解は  $C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 te^{\lambda_1 t}$  ( $C_1, C_2$  は定数) となります。

しかし、いきなり「 $te^{\lambda_1 t}$  も解」といわれても、どうやってそんなものを見つけたのでしょうか？ これは、次のようなテクニックで求められます。

最初に求められた解  $C_1 e^{\lambda_1 t}$  について、 $C_1$  が  $t$  の関数  $C_1(t)$  であるとして、微分方程式に代入します。

$$\begin{aligned} (C_1 e^{\lambda_1 t})' &= C_1' e^{\lambda_1 t} + \lambda_1 C_1 e^{\lambda_1 t} = (C_1' + \lambda_1 C_1) e^{\lambda_1 t} \\ (C_1 e^{\lambda_1 t})'' &= (C_1'' + \lambda_1 C_1') e^{\lambda_1 t} + \lambda_1 (C_1' + \lambda_1 C_1) e^{\lambda_1 t} = (C_1'' + 2\lambda_1 C_1' + \lambda_1^2 C_1) e^{\lambda_1 t} \end{aligned} \tag{18}$$

ですから、これらを代入すると

$$\begin{aligned} &(C_1'' + 2\lambda_1 C_1' + \lambda_1^2 C_1) e^{\lambda_1 t} + a(C_1' + \lambda_1 C_1) e^{\lambda_1 t} + bC_1 e^{\lambda_1 t} = 0 \\ &(C_1'' + 2\lambda_1 C_1' + \lambda_1^2 C_1) + a(C_1' + \lambda_1 C_1) + bC_1 = 0 \end{aligned} \tag{19}$$

<sup>1</sup> 指数が虚数の指数関数が三角関数で表されることは、先の講義で複素関数を扱うときにあらためて説明します。

となります。ここで、特性方程式が重解をもつことから判別式  $a^2 - 4b = 0$  で、 $b = \frac{a^2}{4}$  が得られます。また、さきほども述べた解と係数の関係から  $2\lambda_1 = -a$  すなわち  $\lambda_1 = -\frac{a}{2}$  です。これらを用いると

$$(C_1'' - aC_1' + \frac{a^2}{4}C_1) + a(C_1' + -\frac{a}{2}C_1) + \frac{a^2}{4}C_1 = 0 \quad (20)$$

となり、整理すると  $C_1''(t) = 0$  となります。このことから、 $C_1(t)$  は  $C_1(t) = pt + q$  ( $p, q$  は定数) の形をしていることがわかるので、こちらの解は  $(pt + q)e^{\lambda_1 t}$  となります。よって、一般解は前の解との1次結合  $C_1 e^{\lambda_1 t} + (pt + q)e^{\lambda_1 t}$  で、あらためて定数をおきなおすと  $C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 t e^{\lambda_1 t}$  ( $C_1, C_2$  は定数) の形で表されることがわかります。この方法を**定数変化法**といいます。

### 例題

関数  $x(t)$  についての微分方程式  $x'' - 5x' + 6x = 0$  を、初期値  $x(0) = 1, x'(0) = 0$  として解いてください。

(解答) この方程式は斉次形2階線形微分方程式で、特性方程式は  $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$  です。これを解くと  $\lambda = 2, 3$  で、このことから一般解は  $x(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}$  ( $C_1, C_2$  は定数) となります。初期条件から  $x(0) = C_1 + C_2 = 1, x'(0) = 2C_1 + 3C_2 = 0$  で、これらから  $C_1 = 3, C_2 = -2$  となります。よって求める特殊解は  $3e^{2t} - 2e^{3t}$  となります。■

---

### 問題

関数  $x(t)$  についての次の微分方程式を、示された初期条件のもとで解いてください。

1.  $x'' - 2x' - 3x = 0, x(0) = 0, x'(0) = 4$
2.  $x'' + x = 0, x(0) = 1, x'(0) = 1$
3.  $x'' - 4x' + 4x = 0, x(0) = 0, x'(0) = 1$

### 参考文献

千葉逸人, これならわかる 工学部で学ぶ数学, プレアデス出版, 2006. ISBN4-7687-0882-X  
水田義弘, 詳解演習 微分積分, サイエンス社, 1998. ISBN4-7819-0891-8  
後藤憲一, 力学, 学術図書, 1999. ISBN978-4873-61040-5