2015 年度秋学期　応用数学（解析）　第 9 回

演習問題

過去の試験問題から選んだものです。参考文献からとった問題もあります。

実数の定義・数列の収束に関して

次の各問に答えよ。

1. 「可算無限」とは何かを説明せよ。
2. 数の「稠密性」と「連続性」の違いを説明せよ。
3. 実数の連続性の定義をひとつあげよ。
4. 数列 $a_n = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ は $n \to \infty$ で 0 に収束することを，$\varepsilon - N$ 論法で示せ。

微分方程式について

関数 $x(t)$ についての次の微分方程式を解け。ただし，初期値が指定されている場合はその初期値を満たす特殊解を，そうでない場合は一般解を求めよ。

1. $x' = \dfrac{2tx}{t^2 - x^2}$
2. $tx' - x = 1$
3. $tx' - x = x^{\frac{2}{3}}$
4. $x'' + 2x' - 3x = 3t^2 + 2t - 3,\ x(0) = x'(0) = 0$
5. $x'' + x = \cos 2t,\ x(0) = x'(0) = 0$

参考文献

水田義弘，詳解演習　微分積分，サイエンス社，1998. ISBN4-7819-0891-8

解答例

実数の定義・数列の収束に関して

1. （講義第２回参照）
2. （講義第３回参照）
3. （講義第３回・第４回であげた４つの定義のうち，ひとつを答えてください。）
4. どんな ε に対しても，$N = (\frac{1}{\varepsilon}$以上の最小の整数）とおくと，$|a_N| \leqq \varepsilon$ となる。よって，$n > N$ のとき $|a_n - 0| < \varepsilon$ となり，$\varepsilon - N$ 論法による収束の定義により $n \to \infty$ のとき $a_n \to 0$ となる。■

微分方程式について

1. 与式の右辺の分母分子を t^2 で割ると $x' = \dfrac{2\left(\frac{x}{t}\right)}{1-\left(\frac{x}{t}\right)^2}$ となるので，同次形の微分方程式である。よって $\dfrac{x}{t} = u$ とおくと

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} = t\frac{du}{dt} + u &= \frac{2u}{1-u^2}\\ t\frac{du}{dt} &= \frac{2u}{1-u^2} - u = \frac{u(1+u^2)}{1-u^2}\\ \frac{1-u^2}{u(1+u^2)}du &= \frac{1}{t}dt\\ \int\left(\frac{1}{u} - \frac{2u}{1+u^2}\right)du &= \int\frac{1}{t}dt\\ \log|u| - \log|1+u^2| &= \log|t| + C \ (C \text{ は定数})\end{aligned} \tag{1}$$

となり，$\dfrac{u}{1+u^2} = \pm e^C t$ となる。よって，$\pm e^C$ をあらためて定数 A とおくと，$\dfrac{u}{1+u^2} = At$ が得られる。ここで $u = \dfrac{x}{t}$ を代入すると，$\dfrac{x}{t} = At\left(1+\left(\dfrac{x}{t}\right)^2\right)$ より一般解は $x = A\left(t^2+x^2\right)$ となる。■

2. 与式より $x' - \dfrac{x}{t} = \dfrac{1}{t}$ と変形でき，これを１階線型微分方程式の一般形 $x' + P(t)x = Q(t)$ にあてはめると $P(t) = -\dfrac{1}{t}, Q(t) = \dfrac{1}{t}$ となる。よって，$p(t) = \exp(-\int\dfrac{1}{t}dt) = \dfrac{1}{t}$ とすると，一般解は C を定数として

$$\begin{aligned}\frac{1}{t}x &= \int\frac{1}{t^2}dt\\ \frac{1}{t}x &= -\frac{1}{t} + C\\ x &= -1 + Ct\end{aligned} \tag{2}$$

となる。■
（すみません，第６回の演習問題と同じでした）

3. 与式は Berunoulli の微分方程式で，その一般形 $x' + P(t)x = Q(t)x^n$ にあてはめると $P(t) = -\dfrac{1}{t}$，$Q(t) = \dfrac{1}{t}$，$n = \dfrac{2}{3}$ である。したがって，$u = x^{1-\frac{2}{3}} = x^{\frac{1}{3}}$ とおくと，$u' + \dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{t}\right)u = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{t}$ す

なわち $u' + \frac{-1}{3t}u = \frac{1}{3t}$ と変形できる。この方程式は 1 階線形微分方程式で，$p(t) = \exp\left(\int \frac{-1}{3t}dt\right)$ とおくと $p(t) = \exp\left(-\frac{1}{3}\log t\right) = t^{-\frac{1}{3}}$ であり，また $(p(t)u)' = p(t)(\frac{1}{3t})$ がなりたつことから

$$
\begin{aligned}
(t^{-\frac{1}{3}}u)' &= t^{-\frac{1}{3}}\frac{1}{3t} \\
t^{-\frac{1}{3}}u &= \frac{1}{3}\int t^{-\frac{4}{3}}dt \\
t^{-\frac{1}{3}}u &= -t^{-\frac{1}{3}} + C \text{（}C\text{ は定数）}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

よって $u = -1 + Ct^{\frac{1}{3}}$ である。$u = x^{\frac{1}{3}}$ だったので，一般解は $x = \left(-1 + Ct^{\frac{1}{3}}\right)^3$ となる。■

4. まず与えられた方程式の特殊解を求めるため，$x = at^2 + b^t + c$ と見当をつけて与式に代入すると

$$
\begin{aligned}
2a + 2(2at + b) - 3(at^2 + bt + c) &= 3t^2 + 2t - 3 \\
-3at^2 + (4a - 3b)t + (2a + 2b - 3c) &= 3t^2 + 2t - 3
\end{aligned}
\tag{4}
$$

が得られる。これが t によらずなりたつので，

$$
\begin{cases}
-3a & = 3 \\
4a - 3b & = 2 \\
2a + 2b - 3c & = -3
\end{cases}
\tag{5}
$$

がなりたち，これを解くと $a = -1,\ b = -2,\ c = -1$ となる。

一方，対応する斉次形の方程式は $x'' + 2x' - 3x = 0$ で，特性方程式は $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$ であり，その解は $\lambda = 1, -3$ である。よって，斉次形の方程式の一般解は $x(t) = C_1e^t + C_2e^{-3t}$（$C_1, C_2$ は任意の定数）となる。

以上から，与方程式の一般解は $x(t) = C_1e^t + C_2e^{-3t} - t^2 - 2t - 1$ となる。

問題での初期値は，$t = 0$ のとき $x(0) = x'(0) = 0$ となっているので，一般解に代入すると $x(0) = C_1 + C_2 - 1 = 0,\ x'(0) = C_1 - 3C_2 - 2 = 0$ となる。これらから $C_1 = \frac{5}{4},\ C_2 = -\frac{1}{4}$ となるので，求める特殊解は $x(t) = \frac{5}{4}e^t - \frac{1}{4}e^{-3t} - t^2 - 2t - 1$ である。■

5. 特殊解を求めるため，$x = A\cos 2t + B\sin 2t$ と見当をつけて与式に代入すると

$$
\begin{aligned}
(-4A\cos 2t - 4B\sin 2t) + (A\cos 2t + B\sin 2t) &= \cos 2t \\
(-4A + A - 1)\cos 2t + (-4B + B)\sin 2t &= 0
\end{aligned}
\tag{6}
$$

が得られる。これが t によらずなりたつので，$A = -\frac{1}{3},\ B = 0$ となる。

一方，対応する斉次形の方程式は $x'' + x = 0$ で，特性方程式は $\lambda^2 + 1 = 0$ となり，その解は $\lambda = \pm i$ である。よって，斉次形の方程式の一般解は $x(t) = C_1\cos t + C_2\sin t$（$C_1, C_2$ は任意の定数）となる。

以上から，与方程式の一般解は $x(t) = C_1\cos t + C_2\sin t - \frac{1}{3}\cos 2t$ となる。問題での初期値は，$t = 0$ のとき $x(0) = x'(0) = 0$ となっているので，一般解に代入すると $x(0) = C_1 - \frac{1}{3} = 0,\ x'(0) = C_2 = 0$ となる。これらから $C_1 = \frac{1}{3},\ C_2 = 0$ となるので，求める特殊解は $x(t) = \frac{1}{3}\cos t - \frac{1}{3}\cos 2t$ である。■