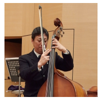
2015年度秋学期　応用数学（解析）　第１５回

第５部・測度論ダイジェスト

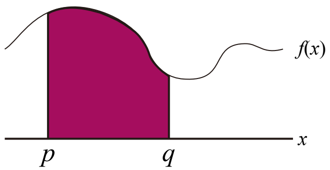
ルベーグ積分

浅野　晃
関西大学総合情報学部

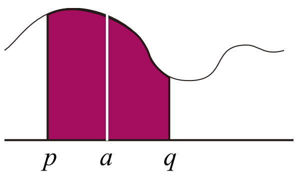


依然,
積分に対する疑問

積分に対する疑問



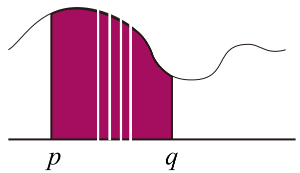
積分 $\int_p^q f(x)dx$



$\int_a^a f(x)dx = 0$ だから,

aのところで幅0の
直線を抜いても
積分の値は変わらない

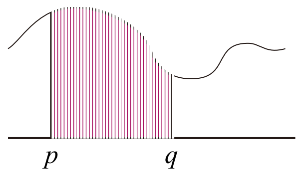
積分に対する疑問



$\int_a^a f(x)dx = 0$

幅0の直線を何本抜いても
積分の値は変わらない

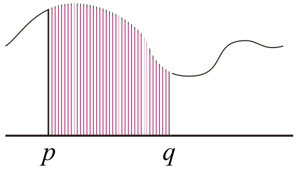
どれだけ拡大してみても,
びっしりと直線がならんでいる



可算無限個の直線を
抜いても
積分の値は変わらない
のか？

積分に対する疑問

どれだけ拡大してみても,
びっしりと直線がならんでいる



幅0の直線を可算無限個抜いても

積分の値は変わらないのか？

この疑問に答えるために,
pとqの間にある有理数全体が占める幅を
考える

可算無限個ある

A. Asano, Kansai Univ.

有理数全体が占める幅

可算無限個ある有理数の幅を考えるには
ルベーグ測度の考え方が必要

有理数の集合が数直線上で持つ幅（測度）

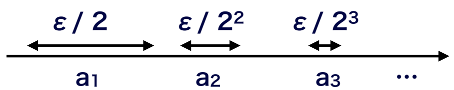
有理数全体を，区間の組み合わせで覆ったときの
「区間の長さの合計」の下限

A. Asano, Kansai Univ.

有理数全体が占める幅

ε を任意の正の数とすると

有理数a_1, a_2, … を
こういうふうに覆うことができる



覆った区間の長さの合計

$$\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + \cdots + \frac{\varepsilon}{2^n} + \cdots = \varepsilon$$

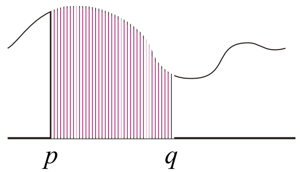
その下限がルベーグ（外）測度で，すなわち0

有理数全体のルベーグ測度は0

A. Asano, Kansai Univ.

積分に対する疑問

この疑問はまだ解決していない。そもそも,



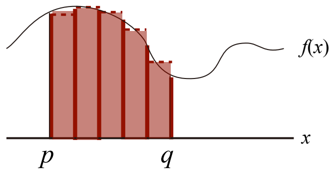
有理数の位置にある可算無限個の直線を抜いた積分

ジョルダン測度にもとづく積分（リーマン積分）では,
可算無限個の分割はできない

A. Asano, Kansai Univ.

区分求積法で積分を求める

長方形で近似

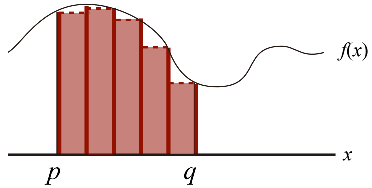


積分 $\displaystyle\int_p^q f(x)dx$ は，

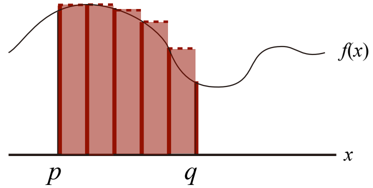
積分区間を 重なりのない，有限個の
区間に分けて，
その上の長方形の面積の極限

「極限」とは，無限ではなく有限

ジョルダン測度



こちらの上限
ジョルダン内測度

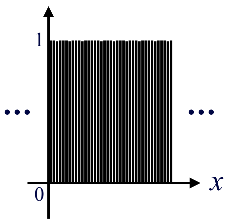


こちらの下限
ジョルダン外測度

両者が一致するときジョルダン測度という
２次元の場合これを面積という

ジョルダン測度が定まる図形（集合）を
ジョルダン可測という

こんな関数の積分は

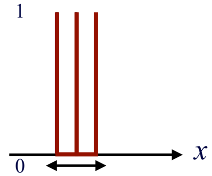


ディリクレ関数

$$h(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ は有理数} \\ 0 & x \text{ は無理数} \end{cases}$$

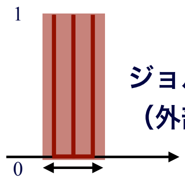
x軸上をどんなに細かく区切っても，
区切りの中に有理数も無理数も必ず存在する

ディリクレ関数の積分

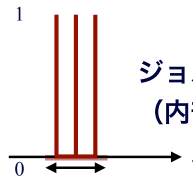


どんな区切りでも，

x軸上をどんなに細かく区切っても，
区切りの中に有理数も無理数も
必ず存在する



ジョルダン外測度
（外部の下限）



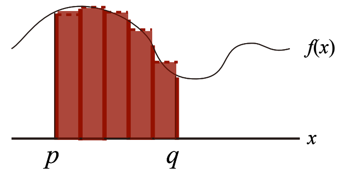
ジョルダン内測度
（内部の上限）

一致しないので
ジョルダン可測でなく，リーマン積分はできない
ルベーグ測度にもとづくルベーグ積分を考える

ルベーグ積分

A. Asano, Kansai Univ.

何がいけなかったのか



区分求積をするときに，

x軸上を無理に分割しようとするから，
有限個に分割できないとき困る

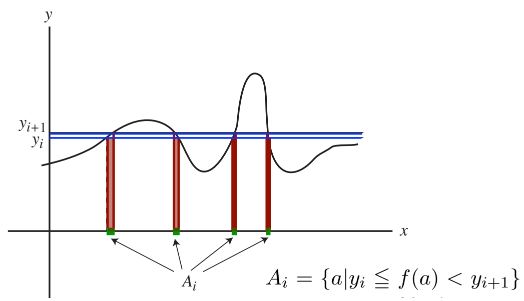
y軸上のほうを分割し，

x軸のほうは
それに対応して分割されるようにすればいい

A. Asano, Kansai Univ.

ルベーグ積分の考え方

y軸を分割



$A_i = \{a | y_i \leqq f(a) < y_{i+1}\}$

y_i ×（A_iのルベーグ測度）を求める

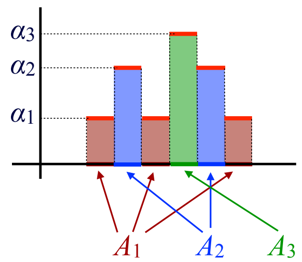
これを各yiについて合計したものの，
分割を細かくしたときの極限

A_iがたとえ可算無限個に分れていても，
ルベーグ可測なら完全加法性があるから合計できる

A. Asano, Kansai Univ.

単関数とルベーグ積分

単関数…
こういう
階段状の
関数



$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(x; A_i)$$

xがAiにあるとき
値が1，他は0
［特性関数］

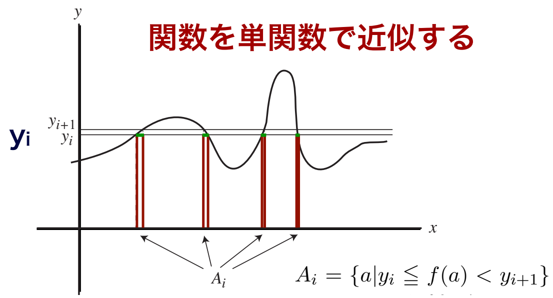
単関数のルベーグ積分

$$\int_A \varphi(x) m(dx) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i m(A_i)$$

αi × Aiのルベーグ測度

A. Asano, Kansai Univ.

可測関数

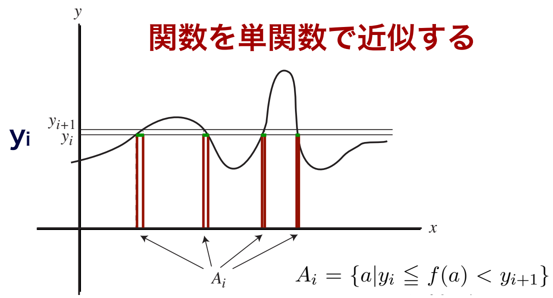


単関数で近似できるためには，どのようにy軸を分割しても図のAiが可測でなければならない

任意のa, bについて
$\{x | a \leqq f(x) < b\}$が可測

[可測関数]

可測関数のルベーグ積分



可測関数の
ルベーグ積分

一番よい近似のとき

単関数で近似

$$\int_A f(x) m(dx) = \sup \int_A \varphi(x) m(dx)$$

可測関数のルベーグ積分

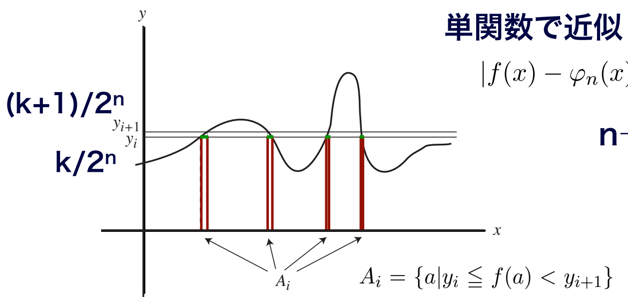
$$\int_A f(x) m(dx) = \sup \int_A \varphi(x) m(dx)$$

本当にsupで
近似できるか？

y軸をこのように分割し
単関数で近似

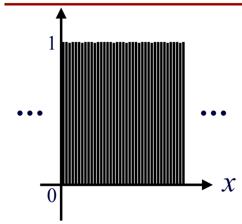
$$|f(x) - \varphi_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}$$

n→∞ で0



積分に対する疑問の答

ディリクレ関数の積分



ディリクレ関数

$$h(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ は有理数} \\ 0 & x \text{ は無理数} \end{cases}$$

$$h(x) = 1 \times \varphi(x; \boldsymbol{Q}) + 0 \times \varphi(x; \boldsymbol{R} \backslash \boldsymbol{Q})$$ という単関数

xが有理数のとき1　　xが無理数のとき1

有理数のルベーグ測度は0

つまり，h(x)をどんな積分区間で積分しても0

A. Asano, Kansai Univ.

今日のまとめ

ルベーグ積分

x軸を細かく分割するのではなく，
y軸を分割して，それにしたがってx軸が分割される

分割されたx軸の区間の長さはルベーグ測度で測るから，区間が可算無限個あってもよい

x軸でなくても

ルベーグ可測な集合に対する可測関数ならOK
例：事象の集合と確率

A. Asano, Kansai Univ.