2015 年度秋学期　統計学　第９回

確からしさを記述する ー 確率

これから先の講義では，データに対して，ここまでで説明した度数分布やその代表値を「推定」する方法を説明します。推定とは，データ全体を調べることができないときに，その一部だけを取り出して，度数分布やその代表値を知る方法です。それを理解するには，どうしても確率の知識が必要ですので，今日は確率のお話です。

「降水確率 40%」とは，「現在と同様な天気図のパターンが現れる機会をたくさん想定すると，そのうち 40%で雨が降る」という定義になっています。しかし，明日の降水確率が 80%だから明日確実に雨が降るわけではなく，また降水確率 20%だから明日は雨が降らないわけでもありません。では，確率とは結局何を意味しているのでしょうか？

「可能性」の集合

いま，くじをひくと，当たりが出たとします。現実世界では，くじは確かに当たったのであって，それ以外の結果は現れていません。

しかし，われわれは，くじびきとはいつも当たるものではなく，いま現れている「当たり」は偶然による結果だということを知っています。「偶然による」というのは，他の可能性もあった，つまり偶然によって他の結果になるかもしれなかった，ということを意味しています。この例の場合ならば，「はずれ」が出るという可能性もあった，ということになります。このような「結果が偶然によって決まる現象」を**ランダム現象**といいます。

統計学の世界では，つねに，この「可能性の集合」を念頭において，考えを進めます。この例の場合ならば，「今は『当たり』という結果が現れたが，『はずれ』が現れる可能性もあった」と考えている，ということです。

そして，さらに「どの結果が，どのくらい現れやすいか」を考えます。これを数字で表したのが**確率**です。「現れやすさ」などというものを，どのように数字で表せばよいのでしょうか。ひとつの考え方は，下のようなものです。

ある結果が現れる確率とは，
これからその結果が現れる可能性のある 十分多くの回数の 機会があるとき，
そのうち本当にその結果が現れる回数の割合である。

次にその結果が現れる確率とは，
遠い将来までの十分多くの回数の機会を考えて初めて言える「結果の回数の割合」を，
次の１回 の機会にあてはめて述べたものにすぎない。

例えば，くじ引きを十分多くの回数行なうとき，10 回に 3 回の割合で当たりが出るとすれば，「あたりが出る確率」は 0.3 であると考えます。このように，確率とは，本来は「遠い将来までの十分多くの回数の機会」を考えたときにはじめていえる，「結果の回数の割合」です。ただ，それを「次にくじをひくと，当たる確率は 0.3」のように，次の 1 回 の機会にあてはめて述べています。

ここでいう「当たりが出る」などの「結果」を，確率論の言葉では**事象**といいます。また，事象が起きる機会，この例ならば「くじを引くこと」を**試行**といいます。また，このような確率の考え方を，**頻**

度による確率の定義といいます。確率とは「特定の結果がおきる回数の割合」ですから，その値は0から1（0%から100%）の範囲になります。

しかし，この「定義」にある「これからその結果が現れる可能性のある十分多くの回数の機会があるとき,」という言い方には，少々おかしなところがあります。

1. 「これから」といっているように，確率は「未来のできごと」について述べています。しかし，未来のことは本当はわかりません。過去の経験をもとに，未来も同じようなことが起きるだろうと期待するのは，たいていは妥当かもしれませんが，そういう想像が正しいかどうかは誰にもわかりません。
2. 「十分多くの」といっていますが，何回なら「十分多い」のでしょうか。数学でいう「十分多い」とは，「誰もが納得するほど多く，しかも納得しない人がいたらすぐに増やすことができる」という意味です。かりに，10万回くじをひくことにして，ほとんどの人が「それは十分多い」と納得したとします。しかし，一人でも「いや，それでは十分多いとはいえない」という人がいたら，その人の求めに応じて「では10万1回に増やしましょう」というように増やせるのが「十分多い」の意味です。もちろん，現実にはそんなことはできません。

つまり，上で述べた「定義」は，確率とは何かを述べてはいますが，それが実際に測れるとは言っておらず，むしろ「実際には測れない」ことを示しているのです。

しかし逆にいえば，過去の経験を未来にも延長できると認めて，数学でいう「十分多く」ではなくても「かなり多く」と認められるくらいの試行を行えば，確率を推測することはできます。なぜならば，試行の数を何度も増やしていくと，そのうち問題にしている事象がおきる回数の割合は，その事象がおきる確率に近づいていくからです。このことを「大数の法則」といいます。この講義では，この考えにもとづいて確率を推測することで，データの集まりに対して代表値を推測することができることを，説明していきます。

確率の意味

仮に，あるくじの当たり確率がわかったとしても，次にくじを1回ひくとき，当たりが出るかどうかは何とも言えません。ただ，「これからもくじをひきつづけると，長い目で見れば10回に3回の割合で当たりが出るだろう」という数値で，次の1回の機会での当たりくじの「出やすさ」を表現しようというのが，確率の考え方です。

たとえば，プロのギャンブラーは日常的に多くの賭けをし，長い目で見た利益を考えていますから，常に確率が大きい方に賭けるほうが有利です。実際，確率論という数学の始まりは，ギャンブラーがさいころ賭博の有利不利を数学者に相談したことでした。しかし，1回しか賭けをしない人にとっては，「確率が大きい」ことと「次の賭けで勝てる」こととは直接は結びつかないことになります。

「降水確率80%」という表現も，このような意味でとらえる必要があります。天気予報には，長い人生で何度も接します。天気予報を信じて，「80%」のときに傘を持っていけば，長い人生の間には，うち80%は「濡れなくてよかったな」，20%は「荷物になったな」となるので，20% のほうはがまんしても，80% の時濡れないほうをとるでしょう。

しかし，一生に1回しかひかないくじで，当たり確率が大きいほうに賭ける意味はあるでしょうか？「ない」とまでは言いませんが，「当たり確率が大きい」ことはあくまで「長い目で見たとき」の話でであることは，知っておく必要があります。

さいころの各目が出る確率はどれも 1/6 か？

高校までの教科書で確率を学ぶ時には，「さいころの各目が出る確率は，いずれも 1/6 である」ということを前提にしていたと思います。

しかし，頻度による確率の定義から考えれば，次にさいころをふったときにある目が出る確率は，十分に多くの回数さいころを振ってみなければわからないことになります。しかも，「十分に多くの回数」振らなければなりませんが，何回なら十分なのでしょうか？ 実は，数学でいう「十分に多く」というのは，「誰も文句を言わないぐらい多く」という意味であって，何回振っても十分ではないのです。

また，さいころを 1 万回ふって，そのうち 1 の目が 1/6 の割合で出たとしても，それはあくまで「過去の実績」であって，その次に 1 万回さいころをふっても，1 の目は 1 回も出ないかもしれません。つまり，頻度による定義では，現実には確率を定めることはできないことになります。

では，なぜ「さいころの各目が出る確率は，いずれも 1/6 である」と言われているのでしょうか？ それは，

1. 各目が同じ確率で出る
2. 各目が出る確率は，いつさいころを振っても同じである

ということを皆が認めているからです。そこで「さいころには全部で 6 種類の目があって，いずれの目も常に同じ確率で出るから，各目が出る確率は 1/6」ということになります。

高校までに習った確率の問題は，このような仮定を認めたうえで，確率すなわち「特定の結果が現れる回数の割合」の問題を，「（さいころの目の種類などの）可能性のある結果の種類の割合」の問題に置き換えたものです。このような確率の考え方を**ラプラスの定義**[1] といいます。

しかし，このラプラスの定義も，よく考えるとおかしなところがあります。上で「このような仮定を認めれば」と書きましたが，これが認められるかどうかは，さいころを十分な回数振ってみないとわかりません。これでは堂々めぐりです。

つまり，確率の定義にはどのように考えてもあやしいところがあります。確率は，**遠い将来までを長い目で見てはじめて言える「特定の結果が現れる回数の割合」を，次の 1 回の機会にあてはめて述べたものにすぎません。**また，確率の定義には「十分多くの回数さいころを投げる」という現実には実行不可能な操作や，「各目が同じ確率で出る」という真偽を確かめられない仮定が含まれています。ですから，確率は**測定するものではなく，何らかの仮定をおいて「定義する」もの**なのです。この講義で扱う統計学では，概ね常識的に確率を理解しておけば十分ですが，ここまでに述べた確率の「あやしさ」は承知しておいてもらいたいと思います[2]。

条件付き確率と「独立」

統計学では，「独立」という言葉がよく出てきます。これは，簡単にいえば，2 つのランダム現象があるとき，一方の結果がもう一方の結果に影響しない，という意味です。例えば，2 つのくじ引きがある

[1]「数学的確率」ということもありますが，現代数学の確率論でいうところの確率と混同するおそれがあるので，あまり一般的ではありません。

[2]現代の数学では，確率は現実の問題から離れて，集合を測る尺度（測度）のひとつとしてとらえられています。

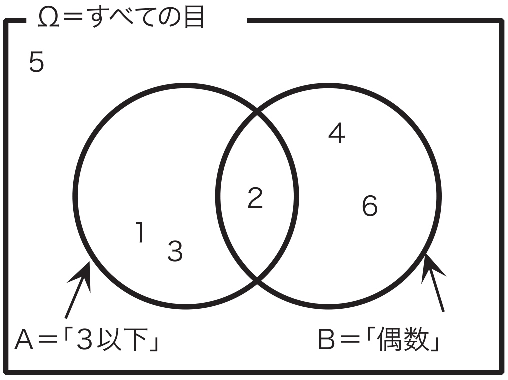

図 1: ２つの事象とベン図

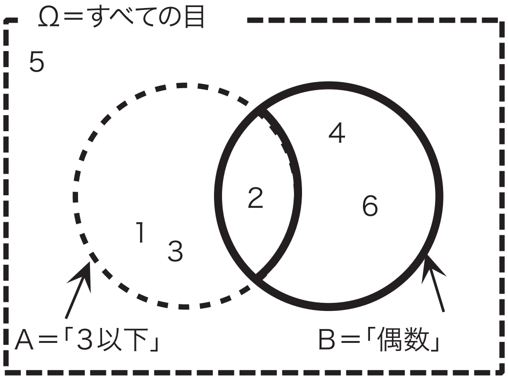

図 2: 条件付き確率

とき，一方に当たるともう一方にも当たりやすくなる，というときは，２つのくじ引きは独立ではありません。

独立の概念は，正確には**条件付き確率**を使って定義されます。単に「明日雨がふる確率」よりも，「明日雨が降るという予報が出たときに，本当に雨がふる確率」のほうが大きい，というのは，日常感じることです。後者のような確率が条件付き確率とよばれるものです。以下では，その意味を，さいころの各目が出る確率を例にとって説明します。

さいころで，「３以下の目が出る確率」を図に表すことを考えます。さいころで，「可能なすべての目」は 1, 2, 3, 4, 5, 6 の６通りで，これを集合 Ω で表します。一方，「３以下の目」は 1, 2, 3 の３通りで，これを Ω の内部にある集合 A で表します。

このとき，「３以下の目が出る確率」は，集合 A の要素がおきる確率なので，「事象 A がおきる確率」で，$P(A)$ で表します。$P(A)$ は，「集合 A の要素の数」を $|A|$ で表すと，

$$P(A) = |A|/|\Omega| = 3/6 = 1/2 \tag{1}$$

となります。

さらにもうひとつ，「偶数の目が出る確率」を考えます。同様にして，「偶数の目」は 2, 4, 6 の３通りで，これを集合 B で表すと，「偶数の目が出る確率」$P(B)$ は

$$P(B) = |B|/|\Omega| = 3/6 = 1/2 \tag{2}$$

となります。これらを目に見えるように表したのが「ベン図」で，図 1 となります。

では，「３以下かつ偶数の目が出る」確率を考えましょう。この事象は集合 $A \cap B$ で表されますから，その確率 $P(A \cap B)$ は

$$P(B) = |A \cap B|/|\Omega| = 1/6 \tag{3}$$

となります。

ここで，$|A \cap B|/|B|$ という確率を考えてみましょう。図 2 の太線の部分です。分母が $|\Omega|$ から $|B|$ に変わっていますから，ここでは，「偶数の目」が，ここでの「可能なすべての目」になっています。一方，$A \cap B$ は「３以下かつ偶数の目が出る」という事象ですが，今は「偶数の目が出る」という事象の中でしか考えていませんから，この事象は単に「３以下の目が出る」という事象ということができます。したがって，

$|A\cap B|/|B|$ ＝偶数の目が出るとわかっている時（偶数の目が出るのが確実な時），それが３以下である確率

になります。

これを，**「B を条件とする A の条件付き確率」**といい，$P(A|B)$ で表します。$P(A|B) = |A\cap B|/|B| = 1/3$ ですから，「偶数の目が出た」という情報が得られている時は，そうでないときよりも「３以下の目が出る」確率は小さくなることがわかります。

ところで，

$$P(A|B) = \frac{|A\cap B|}{|B|} = \frac{|A\cap B|/|\Omega|}{|B|/|\Omega|} = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \tag{4}$$

と表され，これを条件付き確率の定義としている本もあります。ただし，この場合，分母分子それぞれの確率は，いずれも同じ $|\Omega|$ を分母とする確率でなければならないことに，注意する必要があります。また，(4) 式から

$$P(A\cap B) = P(A|B)P(B) \tag{5}$$

となります。(5) 式は，簡単に言えば

「A と B の両方が起きる確率」＝「B が起きたとしたときに A が起きる確率」
×「本当に B が起きる確率」

ということです。$P(A|B)$ と $P(A\cap B)$ の違いも，これでわかると思います。

では，上の例の事象 A が，「３以下の目」ではなく「２以下の目」だったらどうでしょう。このときは，「２以下の目が出る確率」$P(A) = 1/3$ です。一方，$P(A\cap B) = 1/6$ や $P(B) = 1/2$ は変わりませんから，$P(A|B) = |A\cap B|/|B| = 1/3$ もかわりません。

したがって，このときは $P(A|B) = P(A)$ となります。このときは，「事象 A が起きる確率」と「事象 B が起きるとわかっているときに，事象 A が起きる確率」が同じですから，事象 B が起きるかどうかには関係がないことを意味しています。このとき，事象 A と事象 B は**独立**であるといいます。

事象 A と事象 B が独立のとき，(4) 式から

$$P(A\cap B) = P(A)P(B) \tag{6}$$

となります。**事象 A と事象 B が独立のときこうなるのであって，いつもこうなるのではない**ことに注意してください。

確率のパラドックス

ここでいうパラドックスとは，「理論的に正しい推論を行うと，直観とは異なった結果になる例」という意味です。確率のパラドックスとして有名な「モンティ・ホール問題」を，ここで考えてみましょう。

モンティ・ホール氏が司会するテレビ番組にて。箱が３つあり、ひとつだけに賞品が入っている。ゲストは箱をひとつ選ぶが、まだ開けない。

モンティはどの箱に賞品があるかを知っていて、ゲストが選ばなかった箱のうち、空の箱を１つ開ける。モンティはゲストに「いまなら、さっき選んだ箱ではなく、まだ開けていないもうひとつの箱のほうを選んでもかまいません。どうしますか？」という。

選ぶ箱を変えたほうが，ゲストにとって有利だろうか？

∧ ∧
≡ ・ ・ ≡
( )～

箱が残り２つになったから，どちらを選んでも当たる確率は 1/2 じゃないんですか？

選択肢が２つやからといって，確率がどちらも 1/2 とは限らんよ。ゲストが元々選んでた箱に当たりがある確率は，モンティが空箱を開けたら，変わるんやろうか？

∧◆∧
Ξ o- o Ξ
( )～

この問題について，コラムニストのマリリン・ヴォス・サヴァント氏が自身のコラムで「当たる確率は，ゲストが選ぶ箱を変えないと 1/3，変えれば 2/3」と書いたところ，「それは間違っている、変えても変えなくても 1/2 だ」という反論が殺到したというエピソードがあります。

この問題に答えるポイントは，**「モンティが空箱を開けたことは，ゲストが最初に選んだ箱に当たりがあるかどうかを知る手がかりになるか？」**ということです。実は，モンティが同じように空箱を開けても，モンティがどのような考えでそうしたかによって，「ゲストが最初に選んだ箱に当たりがある確率」は変わってきます。それはなぜか考えてみましょう。

この問題のもっとも簡単な解答は，以下のようなものです。

箱を A,B,C とし，ゲストが最初に A を選んだとします。

このとき，賞品が A にある確率は 1/3，「B または C」にある確率が 2/3 です。モンティは，B,C のうち「必ず空の箱を選んで開ける」ので，開けたあとも「賞品が B または C にある確率は 2/3」であることは変わりません。だから，「B または C のうち開いていないほう」に賞品がある確率は 2/3 です。

だいたいこれで間違いないのですが，細かいことをいうと，

モンティは B,C のうち「必ず空の箱を選んで開ける」
→開けたあとも「賞品が B または C にある確率は 2/3」であることは変わらない

のは本当でしょうか？

このルールでは，賞品が B にある場合，モンティは賞品の入っている箱は開けないので，モンティが開けられる箱は自動的に C に決まってしまいます。だから，モンティがその行動によって，ゲストに何かの情報を与えることはできません。賞品が C にある場合も，やはり開ける箱は B に決まっていて，同様です。これらの場合は，ゲストが「モンティが B,C のどちらを開けるか」を見ていても，賞品がどこにあるかの手がかりにはなりません。だから，「開けたあとも『賞品が B または C にある確率は 2/3』であることは変わらない」ことになります。

しかし，賞品が A にある場合は，このルールにしたがう場合でも，モンティは B,C のどちらを開けてもかまいません。そこで，例えば「賞品が A にあるときは，モンティは B,C のどちらを開けてもいいのに，そのときは必ず B を開ける」という裏ルールがあるとしましょう。そうすると，モンティが B を開けると，賞品が A にある確率が大きくなります。ゲストがそれを知っていれば，選ぶ箱を変えるかどうかの手がかりになるでしょう[3]。

あるいは，モンティが実はこのルールにしたがっておらず，「ゲストがどれを選んだかや賞品がどこにあるかにかかわらず，A,B,C のどれかを同じ確率でランダムに選んで開けた結果，『たまたま』ゲストが選んでいなくてかつ空の箱を開けた」のだとしましょう。その場合，「偶然選んだ箱が空だった」ことで，残りの２つに賞品がある確率が大きくなります。ただ，A,B,C のどれかを同じ確率でランダムに選んだのですから，残りのどちらの箱についても平等に，賞品がある確率が大きくなります。ですから，上で述べた解答とは違って「ゲストが選ぶ箱を変えても変えなくても，当たる確率は同じ」ことになります[4]。

このように，実際に「モンティが空の箱を開けた」という事実は同じでも，「モンティの行動には，他にどのような可能性がどんな確率であったのか」が，確率の計算に影響するのです。このことは，モンティの「癖」や「心の中」が問題になる，ということを意味しています。しかし，心の中を客観的に調べることは，通常はできません。この問題の答えは，「モンティがルールを守っていれば」確率はこうなる，という意味でしかありません。「確率は，測るものではなく，定義するもの」なのです。

インターネットで「モンティ・ホール」で検索すると，いろいろな解説が出てきます。また，参考文献として，ジェイソン・ローゼンハウス著（松浦俊輔訳）「モンティ・ホール問題 テレビ番組から生まれた史上最も議論を呼んだ確率問題の紹介と解説」ISBN978-4791767526 をお勧めします。

今日の演習

1. プロ野球の日本シリーズの時期になると，「第 1 試合で勝ったチームが優勝する確率はいくらいくらである」などといった記事が，スポーツ新聞によく載っています。過去の日本シリーズのうち，第 1 試合で勝ったチームが優勝した回数の割合をいっているわけですが，これは確率といえるでしょうか？

2. 刑事ドラマで刑事が「彼が犯人である確率は非常に大きい」と言っています。これは「確率」といえるのでしょうか？

3. 冒険を題材にしたあるコンピュータゲームでは，洞窟を通り抜ける間に宝物 A を獲得する確率 $P(A)$ は 0.7，宝物 B を獲得する確率 $P(B)$ は 0.5 です。また，洞窟を出てきた時点で宝物 A をすでに獲得しているプレイヤーが，宝物 B も獲得している確率 $P(B|A)$ は 0.6 です。このとき，

   (a) 洞窟を出てきたプレイヤーが，宝物 A, B の両方を獲得している確率はいくらですか。

   (b) 洞窟を出てきた時点で宝物 B をすでに獲得しているプレイヤーが，宝物 A も獲得している確率はいくらですか。

[3] ですから，この問題には，厳密には「モンティは，賞品が A にある場合は，B または C を同じ確率でランダムに選んで開ける」と書いておかなければなりません。

[4] モンティが C を開けて空だったとします。このとき，前節で説明した条件付き確率を用いると，A に賞品がある確率をそれぞれ $P(A)$，C に賞品がない確率を $P(\bar{C})$ とするとき，求めたいのは「モンティが C を開けて空だったという条件の下で，A に賞品がある確率」で，$P(A|\bar{C})$ となります。もしもモンティが「A, B, C のどれかを同じ確率でランダムに選んだ」のならば，$P(\bar{C}) = 2/3, P(A) = 1/3$ で，$P(A|\bar{C}) = P(A \cap \bar{C})/P(\bar{C}) = (1/3)/(2/3) = 1/2$ となります。