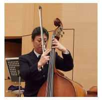
2015年度秋学期　統計学　　第９回

確からしさを記述する — 確率

浅野　晃
関西大学総合情報学部



「確率」って，よく聞くけれど

「降水確率40%」って？

何の割合が40%？

機会

現在と同じ気象状況が
これから何度も何度も起きるとすると
そのうち40%の場合で雨になる

機会のうちの割合が40%

可能性の集合

くじびき

（回転抽選器の画像）

http://epshop.net/epkyoto/7.1/15001/

↓くじをひくと

あたった！

現実におきたのは，
これだけ

他のことは
おきていない

可能性の集合

しかし

（回転抽選器の画像）

http://epshop.net/epkyoto/7.1/15001/

↓

あたった

他の可能性もあった

はずれ　あたり　はずれ

こうなるかも
知れなかった

「偶然」（人知が及ばない）

［ランダム現象］という

A. Asano, Kansai Univ.

可能性の集合

現実｜可能性

（回転抽選器の画像）

http://epshop.net/epkyoto/7.1/15001/

↓

あたった

はずれ　あたり　はずれ

可能性のうち
どの結果になりやすいか？

を，数値で表せないか？
（ギャンブラーの数学）

A. Asano, Kansai Univ.

「確率」の定義

A. Asano, Kansai Univ.

頻度による確率の定義

あるできごとがおきる確率は，
［事象］
そのできごとがおきる可能性のある
十分多くの機会があるとき，
［試行］
それらの機会のうち
そのできごとがおきる機会の数の割合

くじを十分多くの回数ひくとき，
10回中３回の割合で当たるなら，確率0.3

A. Asano, Kansai Univ.

頻度による確率の定義

あるできごとがおきる確率は,

そのできごとがおきる可能性のある
十分多くの機会があるとき,
ダウト(1)　　ダウト(2)

それらの機会のうち
そのできごとがおきる機会の数の割合

A. Asano, Kansai Univ.

2015

9

確率の定義・ダウト(1)

「十分多くの機会」？

数学でいう「十分多く」とは,

だれかが「十分ではない」といったら,
それに応じていくらでも多くすること
ことができる

現実には無理

A. Asano, Kansai Univ.

2015

10

確率の定義・ダウト(2)

機会が「ある」とき？

機会が「あった」ではない

つまり，未来におきるできごとの
話をしている。

未来のことはわからない。

A. Asano, Kansai Univ.

2015

11

確率を定義はしたけれど

定義することと,
測ることとは別

１メートルの定義は？
１キログラムの定義は？

A. Asano, Kansai Univ.

2015

12

確率は測定できないけれど

「十分多くの機会」は現実には無理
未来のことはわからない

でも

過去を未来に延長できると考える

十分多くは無理でも,
「そこそこ多く」の機会があれば
そこそこの精度で確率を推定できる
［大数の法則］

というわけで確率は

「十分多くの機会」に関する話を
次の１回の機会にあてはめている

ギャンブラーは,
日常的に賭けをしているから,
確率の大きいできごとを見抜いて
賭ければ，全体として勝つことができる

どんな名ギャンブラーでも，１回の賭けに
必ず勝つことはできない

もうひとつの確率の定義

さいころで１が出る確率

なぜ1/6なのか？

$$\frac{「1」は1通り}{1，2，3，4，5，6の6通り} = 1/6$$

確率の［ラプラスの定義］という

さっきの「頻度による定義」とは違う…

ラプラスの定義の意味

n回
「1」は1通り
1，2，3，4，5，6の6通り
n回　n　n　n　n　n

= n/(6n)
= 1/6

1～6が皆同じ確率で出る，と認めるなら
「同様に確からしい」

さいころを6n回ふる。（nは十分大きい）
nが十分大きければ,
1～6は同じ回数出る（頻度による定義）

A. Asano, Kansai Univ.
2015

ラプラスの定義の意味

1～6が皆同じ確率で出る，と認めるなら
「同様に確からしい」

正しいと証明する方法はない

このさいころは偏っていない
だろうという
信頼によって認めているだけ

A. Asano, Kansai Univ.
2015

条件付き確率と独立

A. Asano, Kansai Univ.

統計学でいう「独立」とは

2つのランダム現象がおきるとき,
一方の結果がもう一方に影響しない

（回転抽選器の画像）

http://epshop.net/epkyoto/7.1/15001/

2度続けてひくとき,

1度めで出た玉を戻さなければ,
独立でない

1度めであたりが出ると,
2度めは当たりが減っている

正確には［条件付き確率］を使って定義する

A. Asano, Kansai Univ.
2015

条件付き確率

「雨が降る確率」

「雨の予報が出ているときに雨が降る確率」

ふつう，こちらの方が大きい

何かがおきたときに

何かがおきるとわかったときに

何かがおきるのが確実なときに

別のことがおきる確率

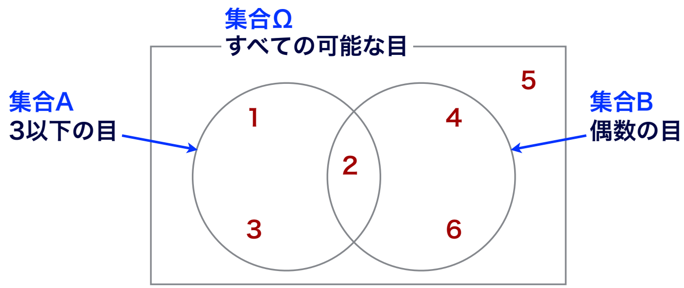
「何か」がおきることの影響を受けることがある

（「何か」と「別のこと」が因果関係になくても）

さいころの例で

集合を表す「ベン図」を使って考える

さいころの「可能な目」は，1,2,3,4,5,6



集合と確率

集合Xの要素の数を|X|で表す

「3以下の目が出る確率」

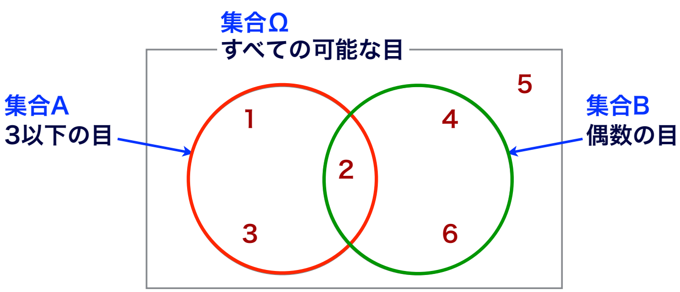
$|A|/|\Omega| = 3/6$

P(A)で表す

「偶数の目が出る確率」

$|B|/|\Omega| = 3/6$

P(B)で表す



集合と確率

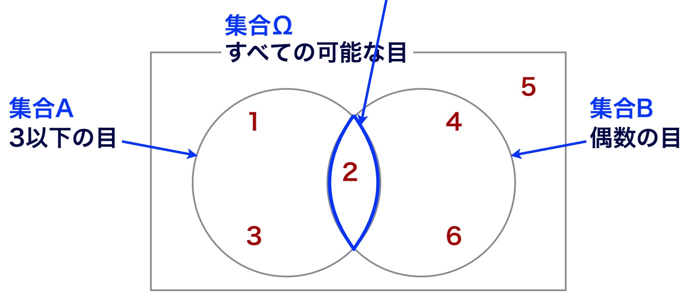
「3以下で，かつ偶数の目が出る確率」

$|A \cap B|/|\Omega| = 1/6$

$P(A \cap B)$で表す

3以下でかつ偶数の目の集合

$A \cap B$ で表す

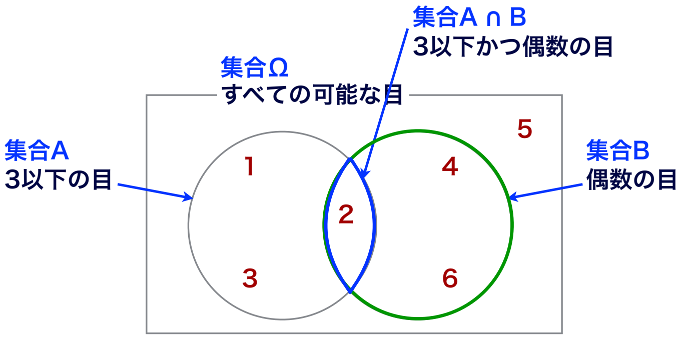


この式は何を表す？

|A ∩ B | / |B|　分母がΩではなくB

「可能なすべての目」は

Ωではなく Bになった



条件つき確率

|A ∩ B| / |B|　分母がΩではなくB

「可能なすべての目」は

Ωではなく Bになった

偶数の目が出ると

わかっているときに

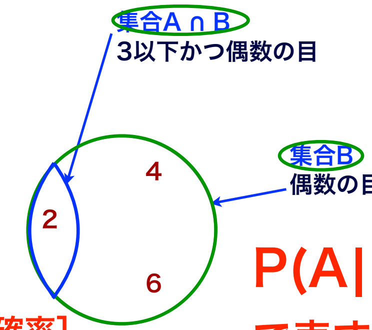
「3以下~~かつ偶数~~」の わかってます

目が出る確率

偶数が出ることを

条件とする,

3以下が出る［条件つき確率］



P(A|B)

で表す

条件付き確率

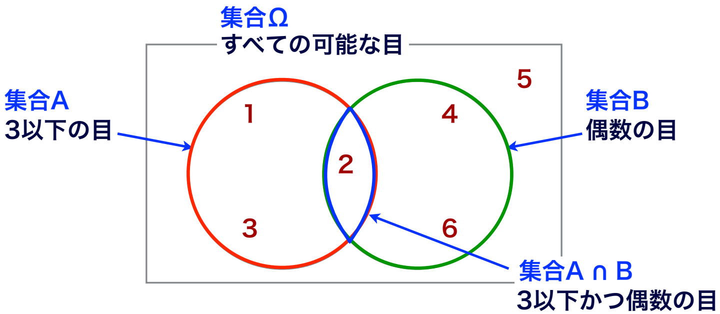
「3以下の目が出る確率」　P(A) = |A| / |Ω| = 3/6 = 1/2

偶数が出ることを条件とする,

3以下が出る条件つき確率　P(A|B) = |A ∩ B| / |B| = 1/3

「偶数が出る」という情報によって,

3以下が出る確率が変化した



「2以下の目」だったら

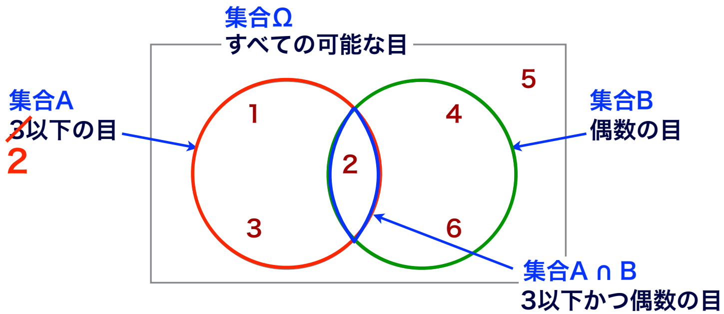
「2以下の目が出る確率」　P(A) = |A| / |Ω| = 2/6 = 1/3

偶数が出ることを条件とする,

2以下が出る条件つき確率　P(A|B) = |A ∩ B| / |B| = 1/3

つまり

P(A) = P(A|B)



「独立」

「2以下の目が出る確率」　$P(A) = |A| / |\Omega| = 2/6 = 1/3$

偶数が出ることを条件とする，
2以下が出る条件つき確率　$P(A|B) = |A \cap B| / |B| = 1/3$

つまり
$P(A) = P(A|B)$　2以下が出る確率は，「偶数が出る」という情報によっても，変化しない

$P(A) = P(A|B)$のとき
「事象Aと事象Bは独立」という

AとBが独立＝「Bが起きる」ことがわかっても，Aが起きる確率には影響がない

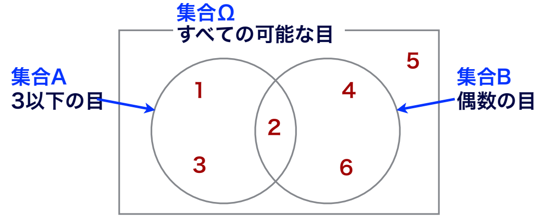
A. Asano, Kansai Univ.　2015

確率の積の法則

Bを条件とする，Aの条件つき確率

$$P(A|B) = |A \cap B| / |B|$$
$$= (|A \cap B| / |\Omega|) / (|B| / |\Omega|)$$
$$= P(A \cap B) / P(B)$$

つまり $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$



A. Asano, Kansai Univ.　2015

確率の積の法則

$$P(A \cap B) = P(A|B) \times P(B)$$

- $P(A \cap B)$：AとBの両方が起きる確率
- $P(A|B)$：とりあえずBが起きるものとして，そのときにAが起きる確率
- $P(B)$：ところでBが本当におきる確率

AとBが独立のときは，$P(A|B) = P(A)$ だから
$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

AとBが独立のときだけ，こうなることに注意

A. Asano, Kansai Univ.　2015

モンティ・ホール問題

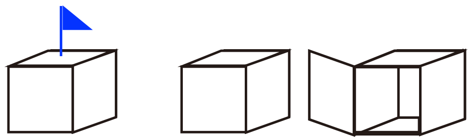
A. Asano, Kansai Univ.

モンティ・ホール問題

モンティ・ホール氏が司会するテレビ番組

箱が３つあり、ひとつだけに賞品
ゲストが箱をひとつ選ぶが，まだ開けない

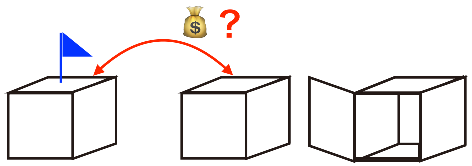
モンティは賞品のありかを知っている。
ゲストが選ばなかった空箱を１つ開けて



モンティ・ホール問題

「いまなら，さっき選んだ箱ではなく，
まだ開けていないもう１つの箱を
選んでもかまいません」

選ぶ箱を変えるほうが，当たる確率が
大きくなるか？



答えは

ゲストが選ぶ箱を変えないと，
当たる確率1/3

箱を変えると，当たる確率2/3

箱は残り２つだから，当たる確率は，
箱を変えても変えなくても1/2じゃないの？

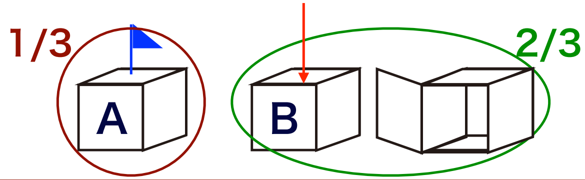
もっとも簡単な説明

箱をA,B,Cとし，ゲストがAを選んだとする

賞品が　Aにある確率　1/3
「BまたはC」にある確率　2/3

モンティが開けるのは必ず空の箱
→ 上の確率は，箱を開けても変わらない

ここに賞品がある確率2/3



本当に正しいか？

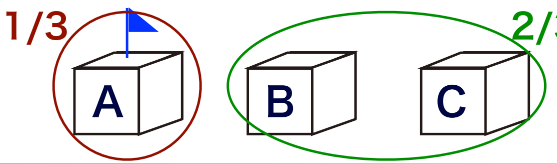
賞品が Aにある確率　1/3

「BまたはC」にある確率　2/3

この確率は，箱を開けても変わらない

本当か？

「モンティは賞品がある箱は開けない」



A. Asano, Kansai Univ.

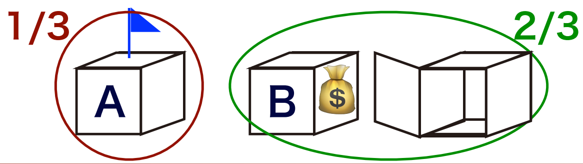
本当に正しいか？

「モンティは，賞品のある箱は開けない」

賞品がBにあるなら，Cしか開けられない

モンティがB,Cのどちらを開けるかは，
賞品のありかを知るてがかりにならない

「BまたはCにある確率2/3」は，
箱を開けても変わらない



A. Asano, Kansai Univ.

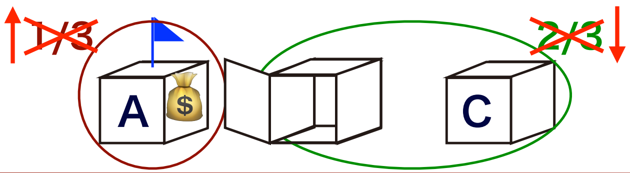
本当に正しいか？

「モンティは，賞品のある箱は開けない」

賞品がAにあるなら?
モンティはB,Cのどちらを開けてもよい

もしも「賞品がAにあるときは，必ずBを開ける」という裏ルールがあったら？

モンティがBを開けたら，賞品はAにある可能性が高い



A. Asano, Kansai Univ.

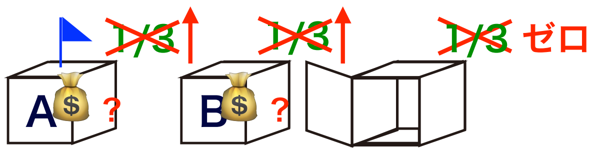
本当に正しいか？

「モンティは，賞品のある箱は開けない」

モンティが，↑これを守ってなかったら？

モンティは，実はA,B,Cを同じ確率でランダムに選んでおり，今回たまたまCを開けたら空だった，としたら

賞品がA,Bにある確率が平等に大きくなる



A. Asano, Kansai Univ.

この問題のポイントは

モンティの行動は，賞品のありかを知る手がかりになっているか？

それは，「他にどんな可能性があったか」によって変わる

それには，モンティの「心の中」が影響します。