

2015年度秋学期 統計学 第14回
分布についての仮説を検証する
— 検定

浅野 晃
関西大学総合情報学部



1

仮説検定の考え方は、単純

2

くじのあたり確率

「夏祭り、夜店のくじに当たりなし
露天商の男を逮捕」

(朝日新聞大阪版2013年7月29日)

「1万円以上をつぎ込んだ男性が**不審**
に思い、府警に相談。28日に露店を
家宅搜索し、当たりがないことを確認
した」

2015

3

半分当たるといুকじへの疑問

「半分の確率で当たる」といুকじを
10回ひいても、1回も当たらなかった

運が悪いのか？

それとも
「半分の確率で当たる」
というのが**ウソ**か？



<http://epshop.net/epkyoto/7.1/15001/>

2015

4

こう考える

警察みたいに全部のくじを調べられないなら、

仮に、本当に「確率1/2で当たる」とする

そのとき、10回ひいて1回も当たらない確率は、 $(1/2)^{10}=1/1024$

こう考える

本当に「確率1/2で当たる」なら、
10回ひいて1回も当たらない確率は
1/1024 (約0.001)

それでも「確率1/2で当たる」を信じるのは、

確率0.001でしか起きないことが、
いま目の前で起きていると信じるのと同じ

こう考える

確率0.001でしか起きないことが、
いま目の前で起きていると信じる

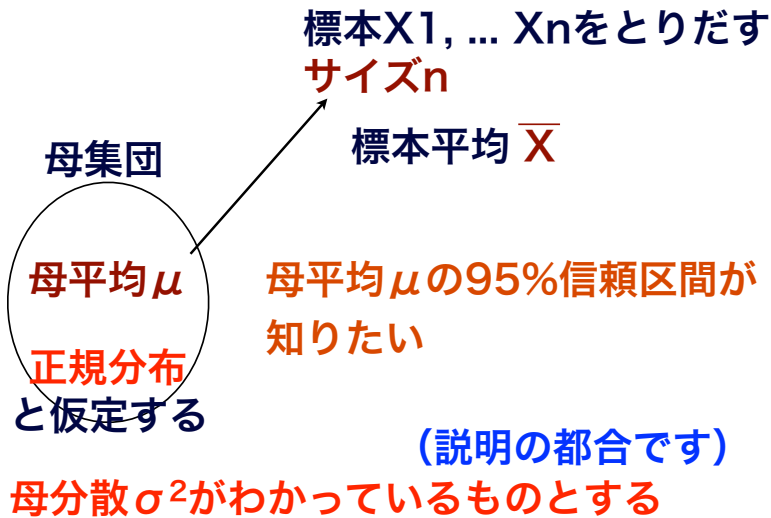
そりゃちょっと無理がありませんか？

というわけで、

「確率1/2で当たる」はウソ、と
考えるほうが自然　これが【仮説検定】

区間推定から導かれる仮説検定

正規分布の場合の区間推定



9

正規分布の場合の区間推定

考え方

標本は、母集団分布と同じ確率分布にしたがう
正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$

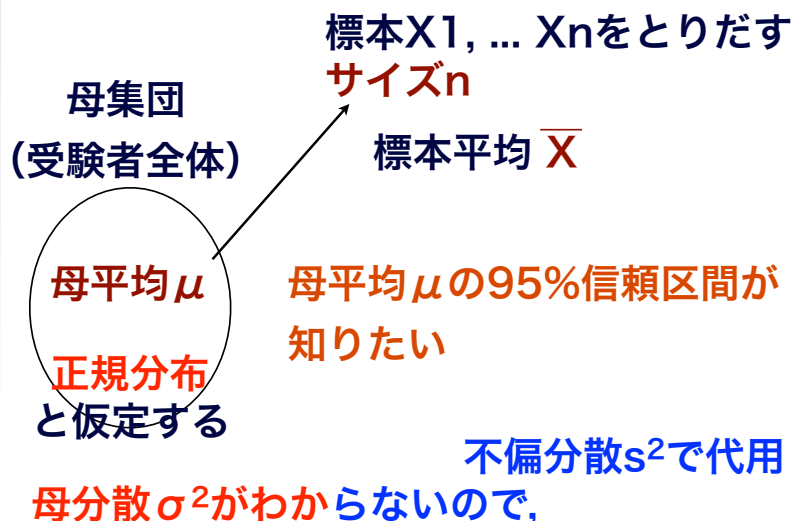
\bar{X}
標本平均は、やはり正規分布にしたがうが、分散
が $1/n$ になる 正規分布 $N(\mu, \sigma^2/n)$ 【性質2】

正規分布の【性質1】により

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \text{ は標準正規分布にしたがう } N(0, 1)$$

10

この例題は



11

t分布

t統計量 $t = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}}$ は

自由度 $(n-1)$ の t 分布にしたがう
 $t(n-1)$

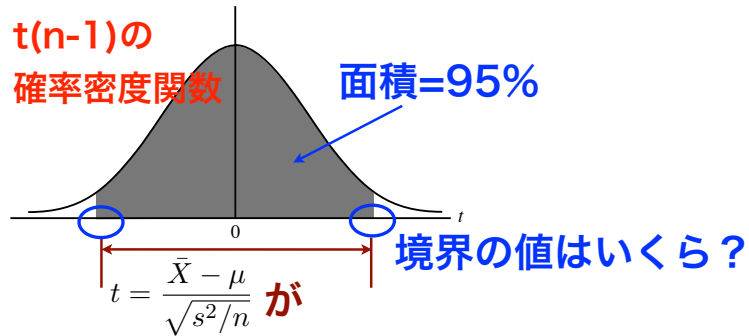
(「スチューデントのt分布」という)
発見者ウィリアム・ゴセットのペンネーム

12

t分布を用いた区間推定

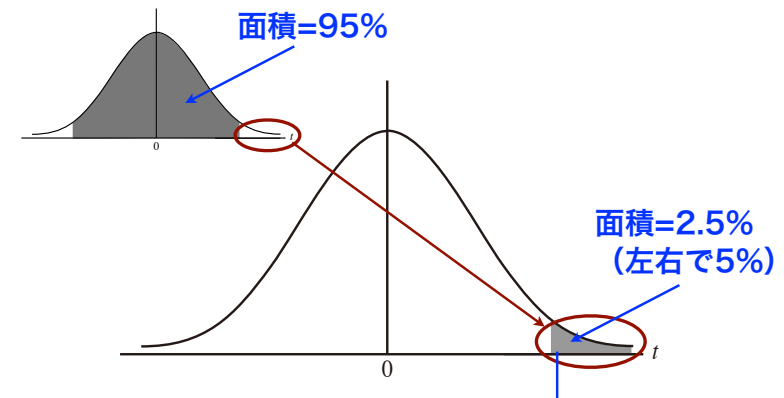
$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}}$ は自由度(n-1)のt分布にしたがう
t(n-1)

t(n-1)の
確率密度関数



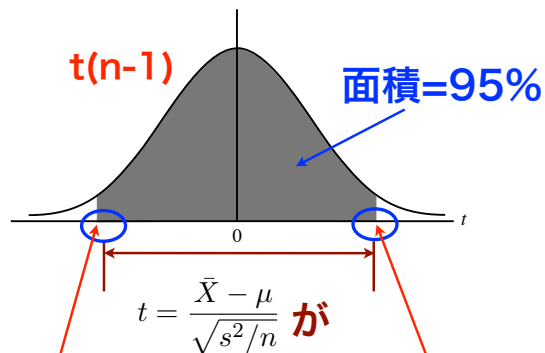
この区間に入っている確率=95%とすると

t分布を用いた区間推定



境界の値は自由度によってちがうので
 $t_{0.025}(n-1)$ としておく [上側2.5%点] という

t分布を用いた区間推定



この区間に入っている確率=95%

$-t_{0.025}(n-1)$

$t_{0.025}(n-1)$

t分布を用いた区間推定

$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}}$ が $-t_{0.025}(n-1)$ と
 $t_{0.025}(n-1)$ の間に入っ
ている確率が95%

式で書くと

$$P\left(-t_{0.025}(n-1) \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}} \leq t_{0.025}(n-1)\right) = 0.95$$

μ の式に直すと

$$P\left(\bar{X} - t_{0.025}(n-1)\sqrt{\frac{s^2}{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{0.025}(n-1)\sqrt{\frac{s^2}{n}}\right) = 0.95$$

前回のプリントの例題

$$t_{0.025}(10-1)=2.262$$

標本平均=50 不偏分散=25 標本サイズ=10

$$P\left(\bar{X} - t_{0.025}(n-1) \frac{\sqrt{s^2}}{n} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{0.025}(n-1) \frac{\sqrt{s^2}}{n}\right) = 0.95$$

μ の95%
信頼区間の
下限

μ の95%
信頼区間の
上限

で、信頼区間を求めるのは、
今日の本題ではありません。

2015

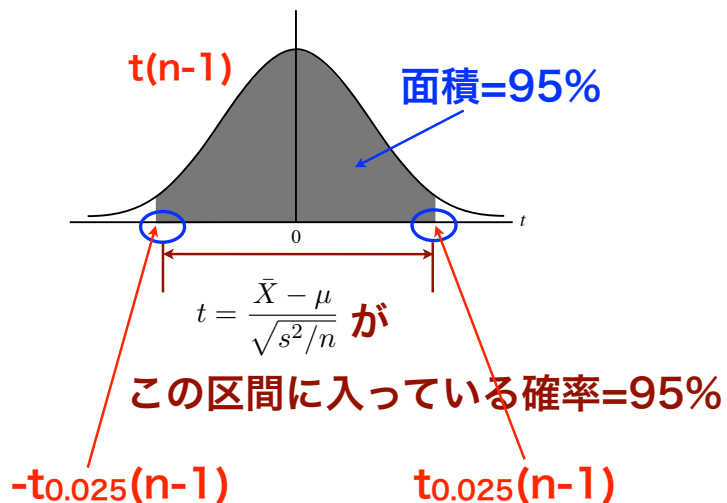
17

区間推定と検定

A.Asano, Kansai Univ.

18

t分布を用いた区間推定



2015

19

この式の意味は

$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}}$ (t統計量) が $-t_{0.025}(n-1)$ と $t_{0.025}(n-1)$ の間に入っている確率が95%

式で書くと

$$P\left(-t_{0.025}(n-1) \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}} \leq t_{0.025}(n-1)\right) = 0.95$$

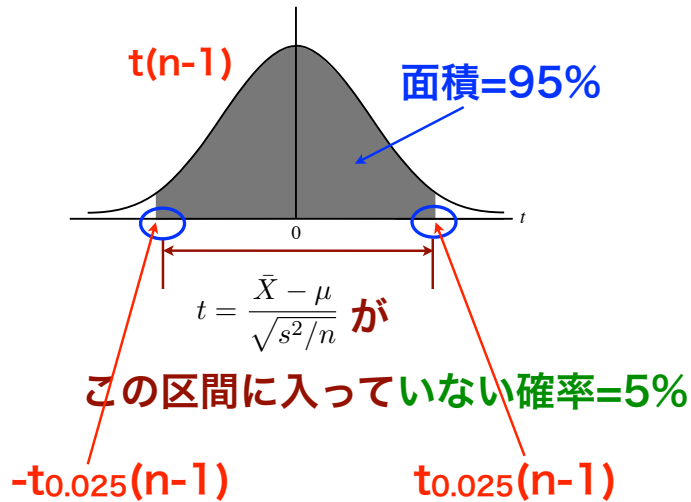
t統計量が $-t_{0.025}(n-1)$ と $t_{0.025}(n-1)$ の間に入っている、
という記述は、確率95%で当たっている

A.Asano, Kansai Univ.

2015

20

見方を変えてみると



21

見方を変えてみると

$$P\left(-t_{0.025}(n-1) \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}} \leq t_{0.025}(n-1)\right) = 0.95$$

t統計量が $-t_{0.025}(n-1)$ と $t_{0.025}(n-1)$ の間に入っている、という記述は、確率95%で当たっている

t統計量が $-t_{0.025}(n-1)$ 以下か $t_{0.025}(n-1)$ 以上である、という記述は、確率5%でしか当たっていない

22

こんな例題 (2ページ上)

(前回の区間推定の問題と同じ条件で)

「受験者全体の平均点 (母平均 μ) は54点」という「仮説」を考えると、

この仮説は当たっているといえるでしょうか？

23

「 $\mu=54$ である」とすると

t統計量の値は

標本平均=50 さらに $\mu=54$ とすると

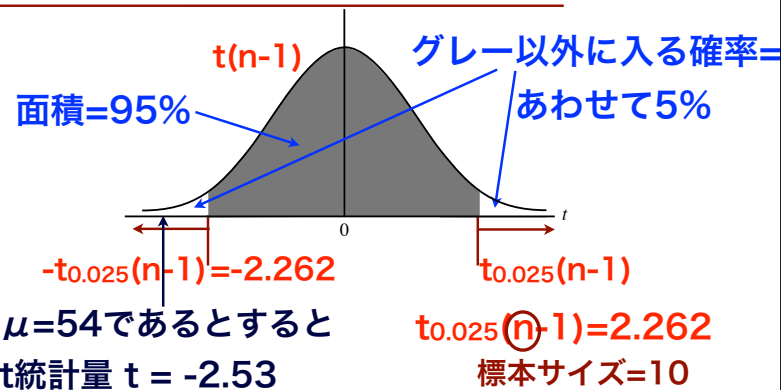
$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}}$$

不偏分散=25 標本サイズ=10

$t = -2.53$ である。

24

「 $\mu=54$ である」とすると



t統計量が $-t_{0.025}(n-1)$ 以下か $t_{0.025}(n-1)$ 以上である, という記述は, 正しい

2015

25

「 $\mu=54$ である」とすると

t統計量が $-t_{0.025}(n-1)$ 以下か $t_{0.025}(n-1)$ 以上である, という記述は, 正しい

この記述は
確率5%でしか当たっていないはずでは?

確率5%でしか当たっていないはずの
記述が 当たっていることになってしまう

A.Asano, Kansai Univ.

2015

26

こんな推論ができる

t統計量が $-t_{0.025}(n-1)$ 以下か $t_{0.025}(n-1)$ 以上である, という記述は,
確率5%でしか当たっていないはず

$\mu=54$ であるとする
t統計量 $t = -2.53$

$n=10$ のとき
 $t_{0.025}(10-1)=2.262$

確率5%でしか当たっていないはずの
記述が, いま偶然当たっていると
考えざるをえない

2015

27

こんな推論ができる

仮説「 $\mu=54$ 」が正しいとすると
確率5%でしか当たっていないはずの
記述が いま偶然当たっていると考えるをえない

確率5%でしかおきないことが偶然おきて
いると考えるよりも

仮説「 $\mu=54$ 」は間違っていると判断する

仮説「 $\mu=54$ でない」が正しいと判断する

A.Asano, Kansai Univ.

2015

28

これが【仮説検定】（検定）

仮説「 $\mu=54$ 」が正しいとすると
 確率5%でしか当たっていないはずの
 記述が いま偶然当たっていると考えざるをえない
 確率5%でしかおきないことが偶然おきて
 いると考えるよりも

帰無仮説を【棄却する】
 仮説「 $\mu=54$ 」は間違っていると判断する

【対立仮説】 を【採択する】
 仮説「 $\mu=54$ でない」が正しいと判断する

2015

29

【有意】という考え

仮説「 $\mu=54$ 」が正しいとすると
 確率5%でしか当たっていないはずの
 記述が いま偶然当たっていると考えざるをえない

確率5%でしかおきないことがおきている
 なら、それは偶然ではないと考える
 【有意】

確率が5%なら、【有意水準】
 それは「小さな確率」と考えている

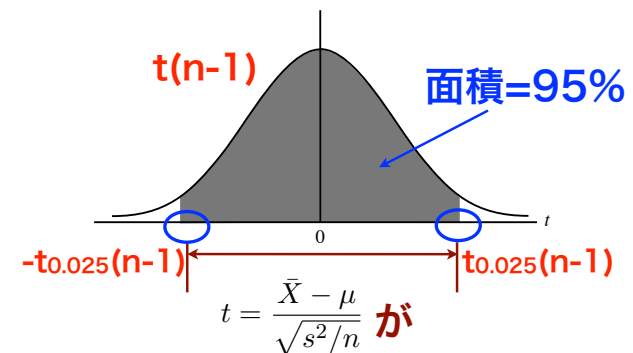
2015

30

両側検定と片側検定

31

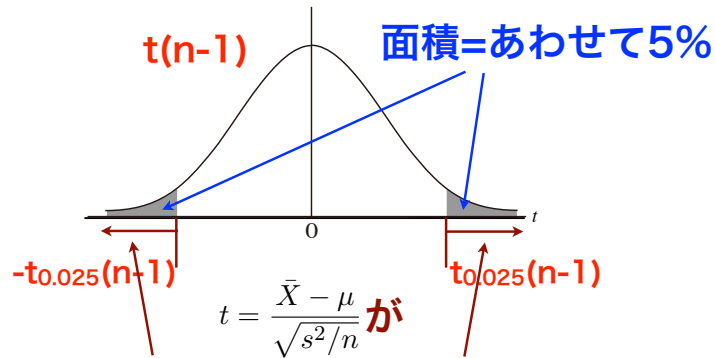
ここまでで説明した検定



2015

32

棄却域

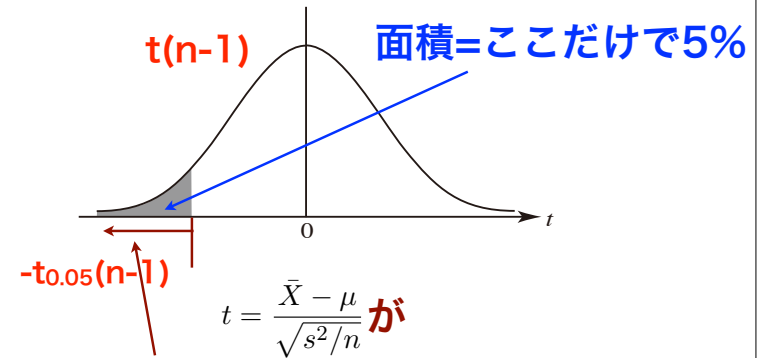


このどちらかの区間に入っている確率=5%
入っているとき帰無仮説を棄却するので
【棄却域】という

2015

33

こんな棄却域でもいいはず

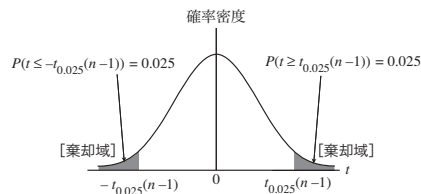


この区間に入っている確率=5%
入っているとき帰無仮説を棄却する
【棄却域】

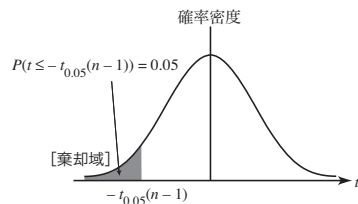
2015

34

両側検定と片側検定



棄却域が両側に
ある
【両側検定】



棄却域が片側に
ある
【片側検定】

どう違う？

2015

35

例題のt統計量は

t統計量の値は

標本平均=50

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}}$$

不偏分散=25

さらに、帰無仮説が正しい
とき $\mu=54$ とすると
 $t = -2.53$ である。

標本サイズ=10

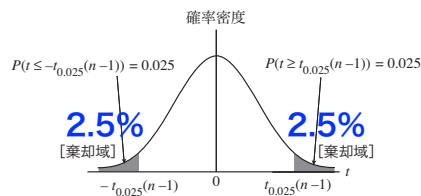
帰無仮説において

μ が大きいと、t統計量は小さくなる
 μ が小さいと、t統計量は大きくなる

2015

36

両側検定では



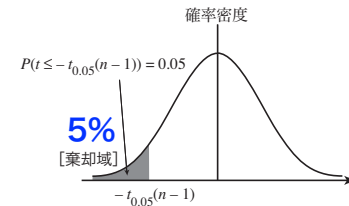
帰無仮説が正しい時、
t統計量が
左右どちらかの棄却域
に入ったら棄却

| 帰無仮説の μ が | t統計量が | 帰無仮説が | 棄却されたら |
|----------------------------|-------|----------------------|---------------------|
| 大きすぎるとき ($\mu=70$ とか) | 小さすぎて | 左の棄却域に 入ったら棄却 | μ はもっと 小さいはず |
| 小さすぎるとき ($\mu=30$ とか) | 大きすぎて | 右の棄却域に 入ったら棄却 | μ はもっと 大きいはず |
| μ が大きすぎても 小さすぎても棄却。 | | 対立仮説は「 μ は〇〇でない」 | |

2015

37

片側検定では



帰無仮説が正しい時、
t統計量が
左にある棄却域に入っ
たら棄却

| 帰無仮説の μ が | t統計量が | 帰無仮説が | 棄却されたら |
|---------------------------|-----------------------------------------------------------|------------------|---------------------|
| 大きすぎるとき ($\mu=70$ とか) | 小さすぎて | 左の棄却域に 入ったら棄却 | μ はもっと 小さいはず |
| 小さすぎるとき ($\mu=30$ とか) | 大きすぎて | 右には棄却域 はない | 棄却しない |
| μ が大きすぎる ときだけ棄却。 | 対立仮説は「 μ は〇〇よりもっと小さい」 たとえ帰無仮説が $\mu=0$ であっても棄却しない。 | | |

A.Asano, Kansai Univ.

2015

38

くじびきの例でいうと

帰無仮説：「当たり確率は50%である」

くじをひく立場なら

10回中1回も当たらなかつたら

- 帰無仮説が正しいとすると、
そんなことが起きる確率は小さいし、
しかも結果に不満だから棄却したい

10回中10回当たったら

- 帰無仮説が正しいとすると、
そんなことが起きる確率はやはり小さいが、
結果に不満はないから棄却しない

片側検定

2015

39

くじびきの例でいうと

帰無仮説：「当たり確率は50%である」

賞品を出す立場なら

10回中1回も当たらなかつたら

- 帰無仮説が正しいとすると、
そんなことが起きる確率は小さいが、
とくに損はしないから棄却しない

10回中10回当たったら

- 帰無仮説が正しいとすると、
そんなことが起きる確率はやはり小さい
それでは破産してしまうので棄却したい

やはり
片側検定

A.Asano, Kansai Univ.

2015

40

くじびきの例でいうと

帰無仮説：「当たり確率は50%である」
中立の立場（商店会長？）なら

10回中1回も当たらなかったときも
10回中10回当たったときも

→ 帰無仮説が正しいとすると、
そんなことが起きる確率はどちらも小さいし、
どちらにしても信用にかかわるので棄却したい

どの検定を用いるかは、
「立場」にもとづいて先に決めて
おかなければならない

これが
両側検定

2015

41

いつもの状況

母集団
(受験者全体)

標本X1, ... Xnをとりだす
サイズn

標本平均 \bar{X}

母平均 μ

正規分布
と仮定する

不偏分散 s^2 で代用
母分散 σ^2 がわからないので、

A.Asano, Kansai Univ.

2015

42

t分布

t統計量 $t = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}}$ は

自由度(n-1)のt分布にしたがう
t(n-1)

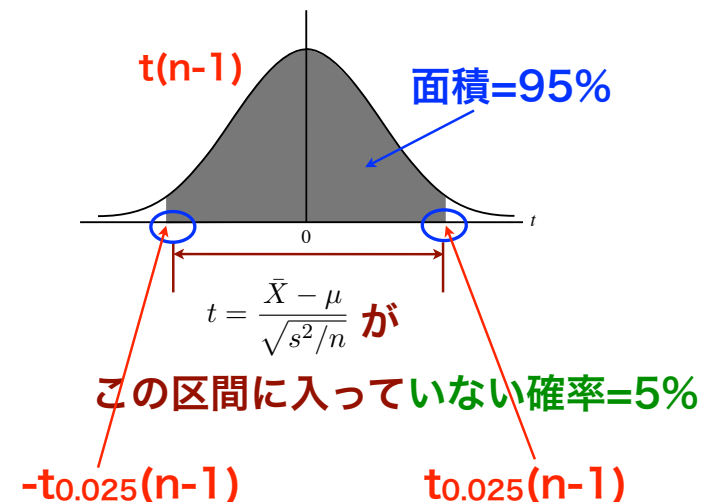
(「スチューデントのt分布」という)
発見者ウィリアム・ゴセットのペンネーム

A.Asano, Kansai Univ.

2015

43

t統計量については



A.Asano, Kansai Univ.

2015

44

こんな例題（2ページ上）

（前回の区間推定の問題と同じ条件で）

「受験者全体の平均点（母平均 μ ）は
54点」という「仮説」を考えると、

この仮説は当たっているといえるでしょうか？

2015

45

「 $\mu=54$ である」とすると

t統計量の値は

標本平均=50

さらに

$\mu=54$ とすると

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}}$$

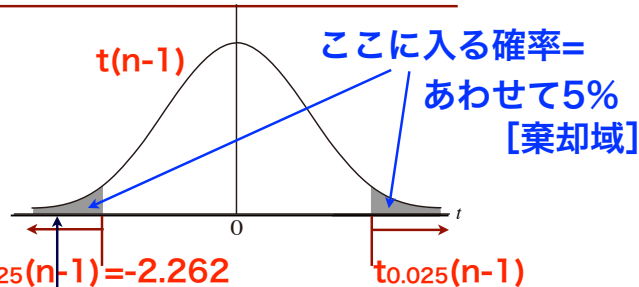
不偏分散=25 標本サイズ=10

$t = -2.53$ である。

2015

46

「 $\mu=54$ である」とすると



$\mu=54$ であるとして
t統計量 $t = -2.53$

$t_{0.025}(n-1) = 2.262$
標本サイズ=10

t統計量が $-t_{0.025}(n-1)$ 以下か $t_{0.025}(n-1)$ 以上である、という記述は、正しい

2015

47

「 $\mu=54$ である」とすると

t統計量が $-t_{0.025}(n-1)$ 以下か $t_{0.025}(n-1)$ 以上である、という記述は、正しい

この記述は
確率5%でしか当たっていないはずでは？

確率5%でしか当たっていないはずの
記述が 当たっていることになってしまう

2015

48

こんな推論ができる

t統計量が $-t_{0.025}(n-1)$ 以下か $t_{0.025}(n-1)$ 以上である, という記述は,
確率5%でしか当たっていないはず

$\mu=54$ であるとするとき $n=10$ のとき
t統計量 $t = -2.53$ $t_{0.025}(10-1)=2.262$

確率5%でしか当たっていないはずの
記述が, いま偶然当たっていると
考えざるをえない

2015

49

こんな推論ができる

仮説「 $\mu=54$ 」が正しいとすると
確率5%でしか当たっていないはずの
記述が いま偶然当たっていると考えざるをえない
確率5%でしかおきないことが偶然おきて
いると考えるよりも

仮説「 $\mu=54$ 」は間違っていると判断する

仮説「 $\mu=54$ でない」が正しいと判断する

2015

50

これが [仮説検定] (検定)

仮説「 $\mu=54$ 」が正しいとすると [帰無仮説]
確率5%でしか当たっていないはずの
記述が いま偶然当たっていると考えざるをえない

確率5%でしかおきないことが偶然おきて
いると考えるよりも

帰無仮説を [棄却する]

仮説「 $\mu=54$ 」は間違っていると判断する

[対立仮説] を [採択する]

仮説「 $\mu=54$ でない」が正しいと判断する

2015

51

棄却されないときは

52

有意水準1%とすると

t統計量が $-t_{0.005}(n-1)$ と $t_{0.005}(n-1)$ の間に入っている, という記述は, 確率99%で当たっている

t統計量が $-t_{0.005}(n-1)$ 以下か $t_{0.005}(n-1)$ 以上である, という記述は, 確率1%でしか当たっていない

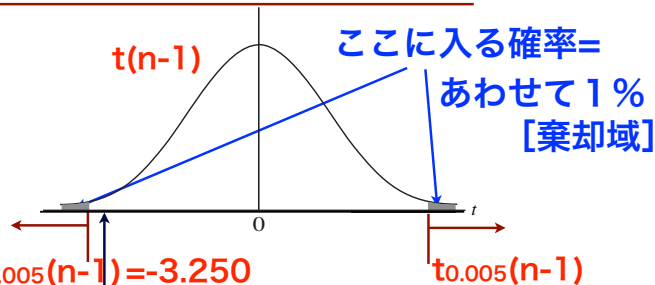
こんな推論ができる

t統計量が $-t_{0.005}(n-1)$ 以下か $t_{0.005}(n-1)$ 以上である, という記述は, 確率1%でしか当たっていないはず

$\mu=54$ であるとする
t統計量 $t = -2.53$

$n=10$ のとき
 $t_{0.005}(10-1)=3.250$

こんな推論ができる



$\mu=54$ であるとする
t統計量 $t = -2.53$

$t_{0.005}(n-1)=3.250$
標本サイズ=10

t統計量が $-t_{0.005}(n-1)$ 以下か $t_{0.005}(n-1)$ 以上である, という記述は, 正しくない

こんな推論ができる

t統計量が $-t_{0.005}(n-1)$ 以下か $t_{0.005}(n-1)$ 以上である, という記述は, 確率1%でしか当たっていないはず

$\mu=54$ であるとする
t統計量 $t = -2.53$

$n=10$ のとき
 $t_{0.005}(10-1)=3.250$

確率1%でしか当たっていないはずの記述が, いま偶然当たっている
とまではいえない

こんな推論になる

帰無仮説「 $\mu=54$ 」が正しいとすると
確率1%でしか当たっていないはずの
記述が いま偶然当たっているとまではいえない

確率1%でしかおきないことが偶然おきて
いるとまではいえない

帰無仮説「 $\mu=54$ 」は間違っている
とは言い切れない

帰無仮説は棄却されない。 **煮え切らない**
結論…

2015

57

棄却されない場合

帰無仮説が棄却されるのは
帰無仮説が正しいとすると、
とても小さな確率でしか起きないはずのこ
とが、いま起きてることになるから

帰無仮説が棄却されないときは
「いま起きてることがおきる確率は
とても小さい、とまではいえない」

2015

58

棄却されない場合

帰無仮説が棄却されないときは
「いま起きてることがおきる確率は
とても小さい、とまではいえない」

だから

「帰無仮説が棄却されない」とは

~~帰無仮説が正しい~~

帰無仮説が間違っているとはいきれない

2015

59

有意水準について

60

今日の例題では

有意水準5%だと 帰無仮説を
棄却する

有意水準1%だと 帰無仮説を
棄却しない

有意水準が違うと
結論が正反対だけど、いいの？

2015

61

検定とはそういうものです

有意水準は
物言いの慎重さを表す

有意水準が
大きい (5%) 確率5%でおきることでも
大胆だが、蛮勇 「こんなことがおきるのは偶然
とは思えない」として棄却

小さい (1%) 確率1%より大きいことなら
慎重だが、臆病 「偶然でないと言い切れない」
として棄却しない

2015

62

検定は
どんなときにするものなのか

63

有意水準と第1種の誤り

有意水準5%のときは

確率5%でしかおきないことがおきているなら、
それは偶然ではないと考える
[有意]

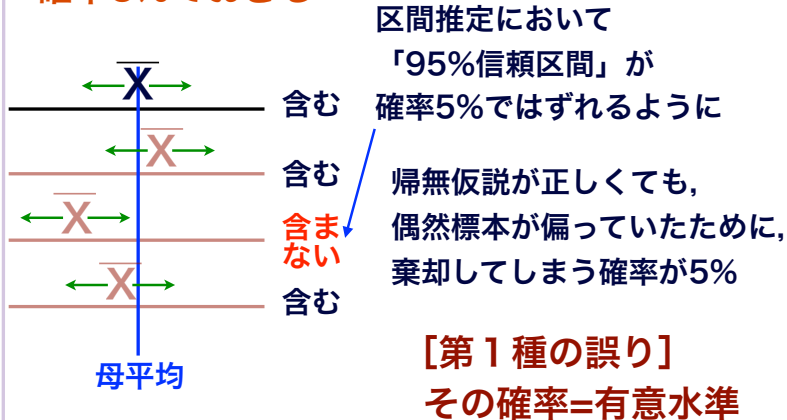
でも、確率5%でしかおきないことは、
言い換えれば、確率5%でおきるのでは？

2015

64

有意水準と第1種の誤り

確率5%でしかおきないことは、
確率5%でおきる



2015

65

有意水準と第1種の誤り

つまり

帰無仮説が本当に正しいとしても、
有意水準5%の仮説検定を**何度も**行くと、
そのうちの5%では**第1種の誤り**を犯す

正しいはずの帰無仮説を棄却し、
採択すべきでない対立仮説を採択してしまう

A.Asano, Kansai Univ.

2015

66

検定の結論が言っていること

検定で「帰無仮説を棄却する」とは

私は、帰無仮説は間違いだ、と判断する。

ただし

私は100回中5回はウソを言う
(第1種の誤りを犯す)。

私が今回、本当のことを言っているのか、
ウソを言っているのか、
それは誰にもわからない。

A.Asano, Kansai Univ.

2015

67

検定はどんなときに

何度でも標本をとりだして検定できるようなら、
検定などする必要はない

小さな標本を1回しかとりだせないときに、
それでも十分に**いえる結論**を導く

何度も検定をすれば、
棄却されないはずの帰無仮説も
たまには棄却される

「血液型と性格に関係がない」という帰無仮説も
たまに棄却されることがある

A.Asano, Kansai Univ.

2015

68

最近はこんな研究も

血液型と性格「関連なし」 読売新聞 2014.7.19

血液型と性格の関連性に科学的根拠はないとする統計学的な解析結果を、九州大の縄田健悟講師（社会心理学）が発表した。

日米の1万人以上を対象にした意識調査のデータを分析した。

質問に対する回答のうち、血液型によって差があったのは3項目だけで、その差もごくわずかだったため「無関連であることを強く示した」と結論づけた。

2015

検定で、標本サイズが大きいと

標本サイズが大きいと

区間推定では 信頼区間が狭くなる
検定では 棄却域が広くなる

標本サイズが非常に大きいと

帰無仮説が

ちょっとでも疑わしいと棄却される

それでも「血液型と性格に関係がない」という帰無仮説が棄却されないなら「無関連であることを強く示し」ている

2015