2015年度春学期　画像情報処理　第6回

第2部・画像情報圧縮／ 準備・「行列」に慣れていない人のために

今日は，「行列」や「ベクトル」の考え方の基本を，高校で習っていない人向けに手短に解説します。

ベクトルと行列の計算

次回（第7回）のプリントでは，「画素が2つしかない画像」を考えて，その画素値 x_1, x_2 を画素値 z に

$$z = a_1x_1 + a_2x_2 \tag{1}$$

という式で変換する，という話が出てきます。これを，「ベクトル」の書き方では，次のように書きます。

$$z = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

右辺の左側の () を**行ベクトル**，右側の () を**列ベクトル**といいます。このように数字を () に入れて並べるだけで，上の (1) 式の計算をしたことになります。

では，上の (1) 式のような計算が2組あるとしましょう。このとき，それぞれの組を添字 (1) と (2) で区別すると，それぞれを求める計算をベクトルで表すと

$$\begin{aligned} z_{(1)} &= \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{2(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ z_{(2)} &= \begin{pmatrix} a_{1(2)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3}$$

となります。この2つの式をひとつにまとめて，次のように書きます。

$$\begin{pmatrix} z_{(1)} \\ z_{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{2(1)} \\ a_{1(2)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

この式の右辺にある，数の4つ入った () を**行列**といい，右辺の計算を「行列とベクトルのかけ算」といいます。行ベクトルが列になって並んでいるので，行列とよぶわけです。

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ を座標平面でのある点と考えると，(4) 式の計算は，$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ という点を $\begin{pmatrix} z_{(1)} \\ z_{(2)} \end{pmatrix}$ という点に移動する計算を表す，ということもできます。また，このときベクトルという言葉を使うと，「$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ は原点から点 (x_1, x_2) をさすベクトル（位置ベクトル）である」といいます。図形的には，原点から点 (x_1, x_2) まで伸びた矢印を想像すればよいでしょう。この言い方をすると，行列とベクトルのかけ算は，ベクトルをベクトルに変換する計算ということができます（図1）。

行列と行列の計算

次回（第7回）のプリントには，

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \tag{5}$$

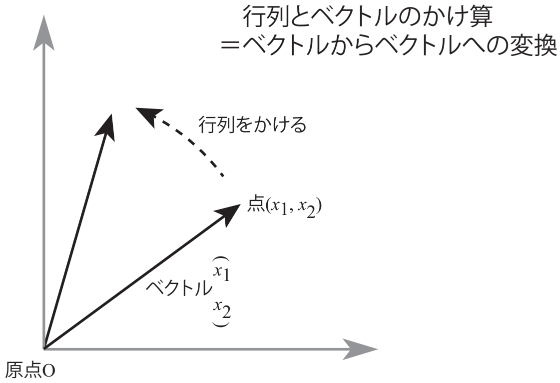

図 1: 行列とベクトルのかけ算.

という形の式も出てきます。ここで，右辺の λ は普通の数（スカラー）で，このとき右辺は $\begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \end{pmatrix}$ を表します。

次回のプリントでは，この式を満たす a_1, a_2 は２組あるので，λ もそれぞれに対応して２つある，という話になっています。それらを $\lambda_{(1)}, \lambda_{(2)}$ と表すと，それぞれに対応する式は

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1(1)} \\ a_{2(1)} \end{pmatrix} = \lambda_{(1)} \begin{pmatrix} a_{1(1)} \\ a_{2(1)} \end{pmatrix} \tag{6}$$

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1(2)} \\ a_{2(2)} \end{pmatrix} = \lambda_{(2)} \begin{pmatrix} a_{1(2)} \\ a_{2(2)} \end{pmatrix} \tag{7}$$

と表されます。

では，今度はこれらの２つの式を，ひとつにまとめて表してみましょう。列ベクトル $\begin{pmatrix} a_{1(1)} \\ a_{2(1)} \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} a_{1(2)} \\ a_{2(2)} \end{pmatrix}$ を左右にくっつけて，$\begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} \end{pmatrix}$ と，ひとつの行列で表します。すると，(6) 式，(7) 式の２つの式は，まとめて

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{(1)} & 0 \\ 0 & \lambda_{(2)} \end{pmatrix} \tag{8}$$

と表すことができます。この式の両辺は，「行列と行列のかけ算」になっています。

(8) 式の左辺は，上で述べたとおり，$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} a_{1(1)} \\ a_{2(1)} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{1(2)} \\ a_{2(2)} \end{pmatrix} \right)$ のように列ベクトルを左右にくっつけたものです。

一方 (8) 式の右辺は, 右側の行列を列ベクトルに分けて $\begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} \lambda_{(1)} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_{(2)} \end{pmatrix} \right)$ と表すと, 左側の行列 $\begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} \end{pmatrix}$ と右側の行列の左側の列ベクトル $\begin{pmatrix} \lambda_{(1)} \\ 0 \end{pmatrix}$ の積は $\begin{pmatrix} \lambda_{(1)} a_{1(1)} + 0 \cdot a_{1(2)} \\ \lambda_{(1)} a_{2(1)} + 0 \cdot a_{2(2)} \end{pmatrix}$

となり，すなわち $\lambda_{(1)}\begin{pmatrix} a_{1(1)} \\ a_{2(1)} \end{pmatrix}$ となります。右側の列ベクトルについても同様です。このように，（行列×列ベクトル）のかけ算を２つ同時に行うのが，行列のかけ算です。

要素が p 個あるベクトルの場合

ここまでは，「画素が２つしかない画像」を考えたところから出発して，２つの要素からなるベクトルについての計算を考えてきました。では，「要素が p 個あるベクトル」の場合を考えてみましょう。

(6) 式，(7) 式の形の式を，要素が p 個の場合に表すと，

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1p} \\ s_{12} & s_{22} & \cdots & s_{2p} \\ \vdots & & \ddots & \\ s_{p1} & s_{p2} & \cdots & s_{pp} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} \tag{9}$$

となります。また，(8) 式を，要素が p 個のベクトルの場合に表すと，

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1p} \\ s_{12} & s_{22} & \cdots & s_{2p} \\ \vdots & & \ddots & \\ s_{p1} & s_{p2} & \cdots & s_{pp} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} & \cdots & a_{1(p)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} & \cdots & a_{2(p)} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{p(1)} & a_{p(2)} & \cdots & a_{p(p)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} & \cdots & a_{1(p)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} & \cdots & a_{2(p)} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{p(1)} & a_{p(2)} & \cdots & a_{p(p)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_{(1)} & & & 0 \\ & \lambda_{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_{(p)} \end{pmatrix} \tag{10}$$

となります。

こんな式は，大変複雑でとても扱いきれません。また，要素が p 個ある場合は，ベクトルも p 次元空間での「矢印」になり，２次元の場合のように図形的に考えることもできません。

そこで，(10) 式の各行列をそれぞれひとつの文字で表して，

$$SP = P\Lambda \tag{11}$$

と表してしまいます。このように，**複雑な計算をあたかも数の計算のように表して，単純な形で理解しようというのが，行列というものが考えられた理由**です。

ただし，行列のかけ算では，積 AB と積 BA は同じとは限りません。すなわち，数のかけ算とは違って，かける順番が問題になります。

転置行列，対称行列，直交行列

転置行列とは，ある行列の行と列を入れ替えたもので，例えば行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の転置行列は $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ です。行列 A の転置行列を，${}^tA, A^t, A^T, A'$ などと表します。今回の講義のプリントでは最後の A' を使っていますが，これは統計学の教科書に多い方式です。さらに，ある行列とその転置行列が同じとき，その行列を**対称行列**といいます。

一方，ある行列に含まれる各列ベクトルが互いに直交しているとき，この行列を**直交行列**といいます。もともと直交している２つのベクトルを直交行列で変換すると，それぞれを変換したベクトルもやはり直交しています。図形的には，直交座標の座標軸を直交行列で変換する計算は，座標軸を直交したまま回転する計算にあたります（図２)。

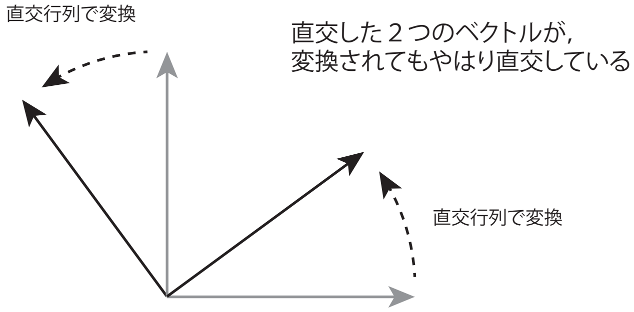

図 2: 直交行列によるベクトルの変換.

逆行列

さきほど「行列と行列のかけ算」を説明しましたが，行列には「割り算」はありません。そのかわりにあるのが**逆行列**です。

行列の A の逆行列 A^{-1} は，$AA^{-1} = A^{-1}A = I$ となる行列のことです。ここで，I は「単位行列」といい，どんな行列 X に対しても $XI = IX = X$ となる行列のことです。つまり「かけても何もおこらない行列」で，数のかけ算でいえば “1”（単位元）にあたります。単位行列の中身は，左上から右下に向かう対角線上の数（対角成分）がすべて 1，他はすべて 0 になります。例えば $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は単位行列です。

このことから，行列の積 XA に右から A^{-1} をかけると $XAA^{-1} = X$ となり，あたかも「A で割った」のと同じような計算ができます。例えば，(11) 式は，逆行列を使うと

$$P^{-1}SP = \Lambda \tag{12}$$

とも表されます。

なお，行列 A が直交行列のときは，その逆行列 A^{-1} は転置行列 A' と同じであることが知られています。図 2 の直交変換で考えると，「直交行列による変換」はベクトルの回転に相当しますから，その逆行列による変換は，逆回りの回転に相当することになります。