2015 年度春学期　画像情報処理　第１１回

第３部・マセマティカル・モルフォロジ／ Granulometry とスケルトン

モルフォロジーの第２回は，物体形状をかたち作る要素の「大きさ」を定量的に取り扱う **granulometry** と**サイズ分布**，それに**スケルトン**の概念について説明します。Granulometry は，画像中の物体に「どのような大きさのものがどのくらい」含まれているのかを表現するもので，モルフォロジーのもっとも本質的な部分です。それは，モルフォロジーの起源が，パリ国立高等鉱山学校で G. Mathéron と J. Serra によって考え出された，鉱石の劈開面の鉱物粒子の分析法にあるからです。鉱物粒子を分析するために粒子の形状・大きさを定量的に評価する必要が生じたことから，モルフォロジーの理論構築が始まりました。

サイズの定義

モルフォロジーにおける「サイズ」とは，ある基本図形（＝集合）とその相似拡大図形との倍率をいいます。例えば，直径が 1cm の円形を「サイズ１の円」とすると，直径 2cm の円は「サイズ２の円」となります。

より一般的には，ある図形 B に対して，倍率を r とするとき，「r 倍の B」を，B が連続集合のとき

$$rB = \{rb | b \in B\} \tag{1}$$

と定義します。B をサイズ１の図形とするとき，rB のサイズは r となります。

しかし，離散画像の場合は，これではおかしなことになります。離散集合 B に対して (1) 式のように $2B$ を定義すると，図１の中のように，すき間が空いてしまいます。そこで，離散画像の場合は Minkowski 集合和を使って

$$rB = B \oplus B \oplus \cdots \oplus B \quad ((r-1)\text{ 回}). \tag{2}$$

図１の右は，この定義による $2B$ を示しています。

ここで注意したいのは，このように相似拡大を定義した場合，図１下段の例の場合，B を見ると十字型のようですが，$2B$ を見るとわかるように実はひし形であることです。これは，B の画素数で表現できる図形には限界があり，「十字」はこの画素数では表現できないことを示しています。

Granulometry とサイズ分布

前回の講義で，「画像 X の構造要素 B によるオープニング」とは「X のうち，B が大きすぎてはみ出してしまうような部分だけを取り除いたもの」，すなわち「X から，B よりも小さい成分を取り除いたもの」であることを説明しました。このように，オープニングには，画像中の物体およびその各部分を「大きさ」によって選別する，一種のフィルタの働きがあります。

そこで，B をある基本的な構造要素とし，これに対して $2B, 3B, \ldots$ という，サイズを順に大きくした相似な構造要素を用意します。そして，各々のサイズの構造要素で各々オープニングを行い，$X_B, X_{2B}, X_{3B}, \ldots$ という画像の系列を作ります。すると，この画像系列では，X_B は B よりも小さい成分が除かれており，X_{2B} はさらに $2B$ より小さい成分が，X_{3B} はさらに $3B$ より小さい成分が，$\ldots$，各々除かれていることになり，X のうちサイズの小さな成分から順に除いた画像系列になっていることがわかります。このオープニングの系列を **granulometry** といいます [1]。

[1] granulometry を定義する場合，構造要素のサイズの定義は前節に限ったものではありません。本文で述べられている

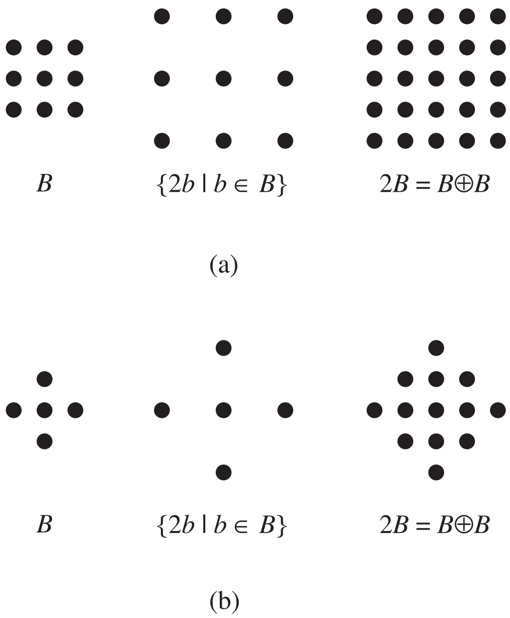

図 1: 離散画像の場合のサイズの定義。(a) 正方形。(b) ひし形。

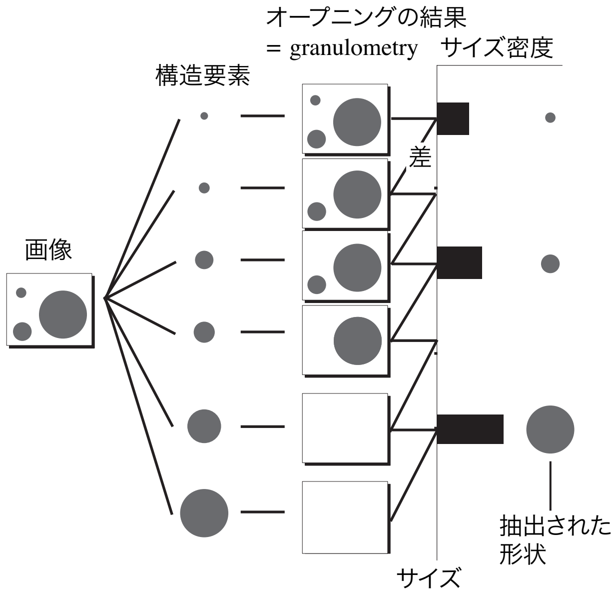

図 2: granulometry とサイズ分布

Granulometry で得られる各画像 $X_B, X_{2B}, X_{3B}, \ldots$ について，その面積を求め，さらに各面積と元の画像 X の面積との比を求めます。ただし「画像の面積」とは，画像に含まれる物体が占める面積（離散画像の場合は物体を構成する画素の数）を意味します。サイズ r に面積比を対応させた関数は，サイズ 0 の時面積比 1 で，単調減少な関数になります。これを**サイズ分布関数** (size distribution function) といいます。サイズ分布関数の，サイズ r に対応する値は「サイズ r 以上の部分の面積の割合」を表します。

さらに，サイズ分布関数の微分を考えます。これは，granulometry の中の，隣接するサイズに対応する画像間の面積の差に相当します。例えば，X_{2B} と X_{3B} の面積の差を考えると，

X_{2B} **に含まれ** X_{3B} **に含まれない部分**は
$2B$ **によるオープニングでは除かれなかったが** $3B$ **によるオープニングでは除かれた部分**
すなわち **サイズがちょうど 2 である部分**

の面積の割合となります。このようにして，各サイズに対応する部分の面積の割合を求めたものを**サイズ密度関数** (size density function) といいます。ここまででわかる通り，サイズ分布関数やサイズ密度関数は，それぞれ確率分布関数，確率密度関数と同じような性質をもつことがわかります。

式で書くと，画像 X の構造要素 B によるサイズ分布関数は，サイズを r として

$$F_{X,B}(r) = \frac{A(X_{rB})}{A(X)} \tag{3}$$

関係は，大きなサイズの構造要素によるオープニングが小さなサイズの構造要素によるオープニングに含まれる，すなわち $X_{nB} \supseteq X_{(n+1)B}$ という包含関係がなりたっていれば成立します。この関係は，nB と $(n+1)B$ が $(n+1)B_{nB} = (n+1)B$ を満たせば成り立ちます。なぜならば，$(n+1)B$ に nB を構造要素とするオープニングを適用しても変化しないということは，$(n+1)B$ には nB よりも小さな部分は含まれないということなので，対象図形 X を $(n+1)B$ でオープニングしたときに，nB よりも小さな部分が残ってしまうことがないからです。このことを「$(n+1)B$ が nB に対して open である」あるいは「$(n+1)B$ は nB-open である」といいます。

となります。ただし，$A()$ は画像に対してその面積を表します。また，サイズ密度関数は連続の場合

$$p_{X,B}(r) = \frac{d}{dr}\left(1 - F_{X,B}(r)\right) = -\frac{1}{A(X)}\frac{dA(X_{rB})}{dr}, \tag{4}$$

離散の場合は

$$p_{X,B}(r) = (1 - F_{X,B}(r+1)) - (1 - F_{X,B}(r)) = -\frac{1}{A(X)}\left(A(X_{rB}) - A(X_{(r+1)B})\right) \tag{5}$$

と定義できます。これらは正のサイズに対する定義ですが，負のサイズに対しては，オープニングをサイズの絶対値によるクロージングに置き換えて定義します。オープニングとクロージングは双対な演算ですから，負のサイズに対するサイズ分布関数・サイズ密度関数は，画像の背景（物体以外の部分）について各サイズ（の絶対値）に対応する部分の面積を求めていることになります。図 2 に granulometry の計算の過程を示します。

サイズ密度関数の評価

サイズ密度関数を定義すると，確率密度関数の場合と同様に，次のような量を定義して画像を評価することができます。以下，離散の場合のみ示しますが，連続の場合も総和が積分になるだけです。また，N は画像 X に含まれる最大のサイズを表します。

・サイズの平均 (mean)

$$E(X,B) = \sum_{r=0}^{N} r p_{X,B}(r). \tag{6}$$

この値は画像 X の構造要素 B によるサイズの平均を意味します。平均はすなわち 1 次モーメントですが，2 次モーメント（分散），さらに高次のモーメントも定義でき，これらによってサイズ密度関数を特徴づけることができます。これらのモーメントを **granulometric moments** といいます。

・サイズのエントロピー (entropy)

$$H(X,B) = -\sum_{r=0}^{N} \log p_{X,B}(r). \tag{7}$$

この値は，画像 X の構造要素 B に対する「平均粗さ (roughness)」を表します。$H(X,B) = 0$ のときは，X はひとつのサイズの B しか含まないことになり，粗さは最低です。$H(X,B) = \log(N+1)/(N+1)$ すなわちその最大値のときは，X は各サイズの B をまんべんなく含んでおり，最大の粗さということになります。

スケルトンと medial axis transform

スケルトン (skeleton) とは「骨格」の意味で，モルフォロジーでは画像中の物体を削り取って骨組みにすることをいいます。このような骨組みを求める方法には，さまざまなものがありますが，モルフォロジーにおけるスケルトンでは，スケルトンから逆に物体が再現できるという特徴があります。

物体を X とするとき，構造要素 B によるスケルトン $SK(X,B)$ は次のように定義されます。

$$\begin{aligned} S_n(X,B) &= (X \ominus n\check{B}) - (X \ominus n\check{B})_B, \\ SK(X,B) &= \bigcup_n S_n(X,B). \end{aligned} \tag{8}$$

スケルトン $SK(X,B)$ からは物体は再現できませんが，$S_n(X,B)$ からは物体が再現できます。また，物体中の各画素に，それを含むスケルトン部分関数の n の値を対応させたものを，**medial axis transform** といいます。$S_n(X,B)$ からの物体 X の再現は，次の計算で行なえます。

$$X = \bigcup_n \left[\sum_n (X,B) \oplus nB \right]. \tag{9}$$

証明は，次のとおりです。

$$\begin{aligned} & [S_n(X,B) \oplus nB] \\ = \;& \big[(X \ominus n\check{B}) - (X \ominus n\check{B})_B\big] \oplus nB \\ = \;& (X \ominus n\check{B}) \oplus nB - (X \ominus n\check{B})_B \oplus nB \\ = \;& (X \ominus n\check{B}) \oplus nB - (X \ominus n\check{B} \ominus \check{B} \oplus B) \oplus nB \\ = \;& X \ominus n\check{B} \oplus nB - X \ominus (n+1)\check{B} \oplus (n+1)B \\ = \;& X_{nB} - X_{(n+1)B}. \end{aligned} \tag{10}$$

となるので，

$$\begin{aligned} & \bigcup_n [S_n(X,B) \oplus nB] \\ = \;& \bigcup_n \big[X_{nB} - X_{(n+1)B}\big] \\ = \;& (X - X_B) \cup (X_B - X_{2B}) \cup (X_{2B} - X_{3B}) \cup \cdots \end{aligned} \tag{11}$$

となります。$(A-B) \cup (B-C) = A - C$ であり，n が十分大きいとき $X_{nB} = \emptyset$ ですから，(11) 式の右辺は X となります。

(8) 式は，直観的にはどういう意味を表しているのでしょうか？ $X \ominus n\check{B}$ は「構造要素の相似形 nB を X の内部に敷き詰めたときの，nB の中心の軌跡」です。このとき，$(X \ominus n\check{B})_B$ は，「nB の中心の軌跡」をサイズ 1 の構造要素 $1B$ でオープニングしたものです。ということは，$(X \ominus n\check{B})_B$ のサイズは 1 以上なので，$(X \ominus n\check{B})$ の内部にその中心が位置するような nB のうち，$(X \ominus n\check{B})_B$ の内部にその中心が位置するようなものは，それよりもサイズが 1 以上大きい相似形を X の内部に配置することで，nB 全体を覆うだけの余裕があります。

したがって，$(X \ominus n\check{B})$ から $(X \ominus n\check{B})_B$ を取り除いた $(X \ominus n\check{B}) - (X \ominus n\check{B})_B$ は，「nB のうち，物体 X の隅に配置されているために，X の内部で n より大きなサイズの相似形で覆うことができないもの」，すなわち物体 X を構成するのに必須の相似形の中心の位置で，これがスケルトンとなります。

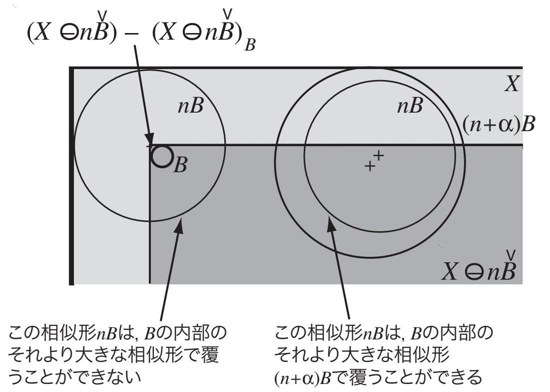

図 3: (8) 式の意味

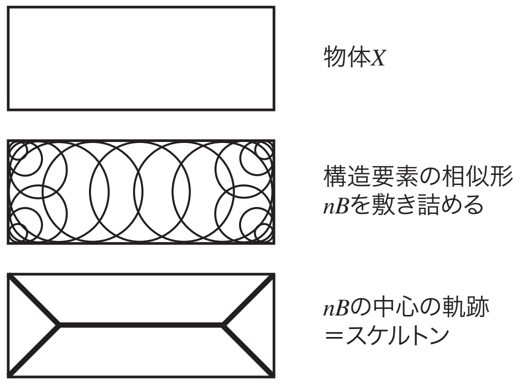

図 4: スケルトンの導出