

## なんかごまかされている気がする

微分を初めて習った時, 例えば「 $f(x) = x^2$  を  $x$  で微分せよ」という問題を次のように説明されたと思います。

$$\begin{aligned} \frac{df(x)}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x+h) = 2x \end{aligned} \tag{1}$$

上の説明では, 3行目で「 $h$  は 0 に近づいているだけで, まだ 0 ではないから」といって  $h$  で割っているのに, 4行目では「 $h$  は 0」としています。これはおかしくありませんか?

この問題を解決するには, 「収束」を正確に理解する必要があります。今日は, 「限りなく近づく」という言葉で表されている「収束」について考えてみます。

## 数列の収束

「数列  $\{a_n\}$  が  $\alpha$  に収束する」とは, 数学では次のような意味だと理解されています。

$\alpha$  のまわりにどんなに狭い区間  $[\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$  を設定しても<sup>1</sup>,  
数列が十分大きな番号  $N$  まで進めば,  
 $N$  番より大きな番号  $n$  については,  $a_n$  はみなその狭い区間  $[\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$  に入る。

これを, 数学の表現では

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N; n > N \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon \tag{2}$$

と書き, これを  $\varepsilon - N$  論法とよびます。図1の「4コマ漫画」で, この様子を説明しています。

同様に, 「 $n \rightarrow \infty$  のとき, 数列  $\{a_n\}$  が  $\infty$  に発散する」とは

どんなに大きな数  $G$  をもってきて,  
数列が十分大きな番号  $N$  まで進めば,  
 $N$  番より大きな番号  $n$  については,  $a_n$  は  $G$  より大きくなる。

すなわち

$$\forall G, \exists N; n > N \Rightarrow a_n > G \tag{3}$$

<sup>1</sup>“ $\varepsilon$ ” は, 数学ではしばしば「すごく小さな (好きなだけ小さくできる) 正の数をさします。

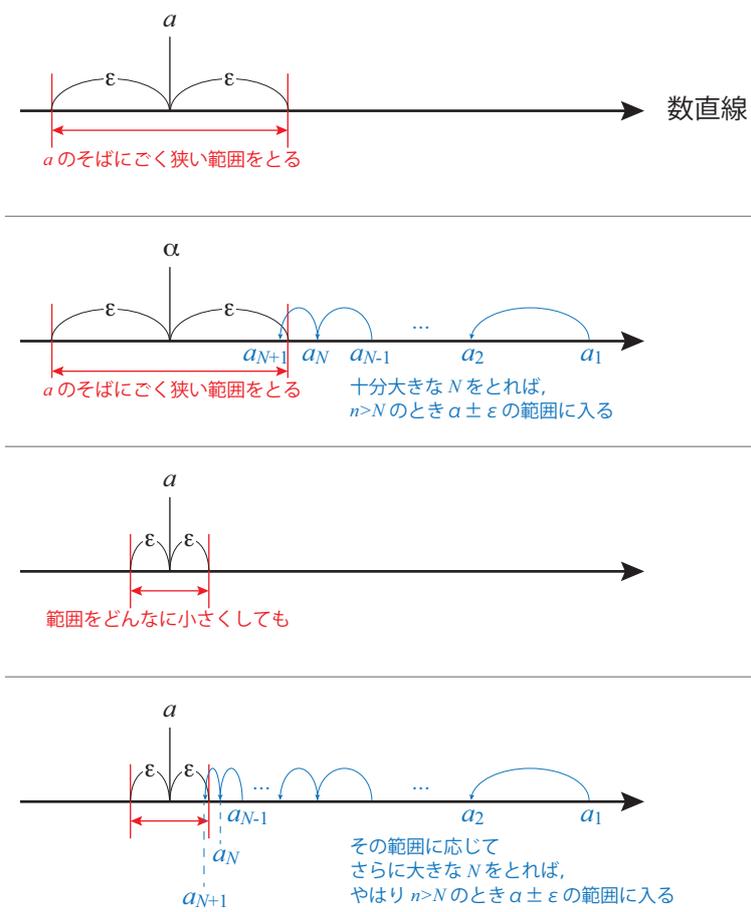


図 1:  $\epsilon$ - $N$  論法

であることを意味しています。

このような収束や発散の理解では、 $\epsilon$  は好きなように小さくできますが、あくまで正の数であって、0 ではありません。 $G$  は好きなように大きくできますが、あくまである有限の数であって、「無限」ではありません。

つまり、「限りなく近づく」とは「隔たりを必要に応じて好きなだけ小さくすることができる」という意味であり、「限りなく大きくなる」とは「必要に応じて好きなだけ大きくすることができる」という意味であって、「無限に近づく」「無限に大きくなる」という意味を入れずに定義されているのです。

### 実数の連続性の、もうひとつの公理

前回説明した、実数の連続性を述べる 4 つの公理のうち、「実数の有界な単調数列は収束する」ことに関しては、前回は説明していませんでした。これを、「実数からなる集合が上(下)に有界であれば、必ず上限(下限)が存在する」という Weierstrass の定理から導いてみます。

なお、数列  $\{a_n\}$  が単調増加であるとは、 $a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots$  であることをいいます。不等号に等号がついて " $\leq$ " になっている場合は広義の単調増加 (あるいは単調非減少) といいます。単調減少は不等号が逆の場合です。

単調に増加する数列  $\{a_n\}$  が有界ならば、Weierstrass の定理により上限  $\alpha$  が存在します。このとき、 $\alpha' < \alpha$  となるような  $\alpha'$  を用意します。この数列は単調増加ですから、ある番号  $p$  以降の  $a_n$  ( $n > p$ ) は、 $\alpha'$  よりも大きく、一方上限  $\alpha$  以下ではあるはずで、つまり  $\alpha' < a_n \leq \alpha$  ( $n > p$ ) です。よって、 $\alpha$  と  $a_n$  の隔たりは  $\alpha$  と  $\alpha'$  の隔たりよりも小さい、すなわち  $|\alpha - a_n| < \alpha - \alpha'$  となります。 $\alpha'$  は、 $\alpha$  より小さければどれだけ  $\alpha$  に近くてもよいので、 $\alpha - \alpha'$  を上の収束の定義の  $\varepsilon$  と考えると、 $\{a_n\}$  は  $\alpha$  に収束することがわかります。■

### 例題

$a > 0$  のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$  であることを証明せよ。

$k > 2a$  であるような番号  $k$  をもってきて、 $\frac{a^k}{k!} = C$  とおきます。すると、 $n > k$  のとき

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a^k}{k!} \times \frac{a}{k+1} \times \frac{a}{k+2} \times \cdots \times \frac{a}{n} = C \times \frac{a}{k+1} \times \frac{a}{k+2} \times \cdots \times \frac{a}{k+(n-k)} \quad (4)$$

で、 $k > 2a$  ですから

$$\begin{aligned} \frac{a^n}{n!} &< C \times \frac{a}{2a+1} \times \frac{a}{2a+2} \times \cdots \times \frac{a}{2a+(n-k)} \\ &< C \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \frac{C \cdot 2^k}{2^n} < \frac{C \cdot 2^k}{n} \end{aligned} \quad (5)$$

とすることができます。そこで、ある (小さな) 正の数  $\varepsilon$  をもってきて、 $n > \frac{C \cdot 2^k}{\varepsilon}$  となる  $n$  を考えると、上の式に代入して  $\frac{a^n}{n!} < \varepsilon$  となります。すなわち、 $\frac{a^n}{n!}$  は 0 に収束します。■

### 関数の極限

ここまで述べてきた数列の収束と同じ論法を使って、「関数  $f(x)$  の  $x \rightarrow a$  の極限が  $A$  である」すなわち  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  であることは、次のように定義されます。

どんなに小さな正の数  $\varepsilon$  を持ってきても、  
 $x$  と  $a$  の隔たりをある  $\delta$  より小さくすれば、  
 $f(x)$  と  $A$  の隔たりも  $\varepsilon$  より小さくできる。

これを、数学の表現では

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \quad (6)$$

と書きます。この表現を  **$\varepsilon$ - $\delta$  論法** とよびます<sup>2</sup>。

この定義で、最初に述べた微分の問題を考えてみると、 $h \rightarrow 0$  という表現では、 $h$  は  $\delta$  より小さいだけであってあくまで 0 ではないので、割り算をしてもいい、ということになります。最後の行で  $h = 0$  としているのは、収束する先が  $h = 0$  とした時の値と同じ、というだけです。

<sup>2</sup>  $\varepsilon$ - $N$  論法も  $\varepsilon$ - $\delta$  論法に含めて、総称して  $\varepsilon$ - $\delta$  論法ということもあります。

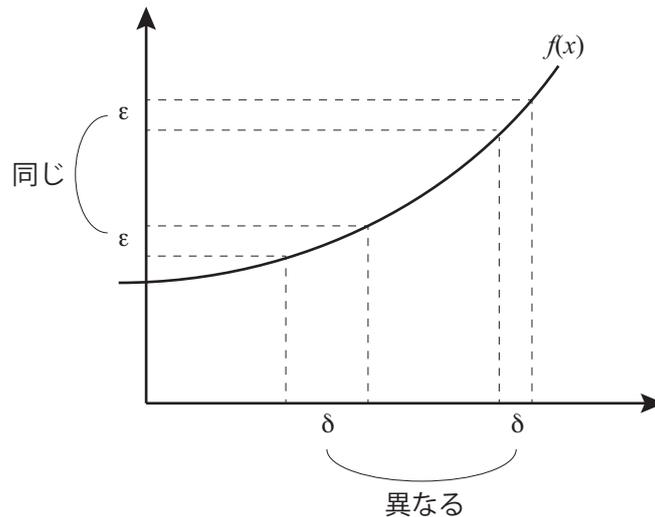


図 2: 同じ  $\varepsilon$  に対しても, 必要な「 $\delta$ の小ささ」は異なる

なお, 関数の極限については「上のことが  $x$  が  $a$  にどの方向から近づいてもなりたつとき」という条件がついています。「方向」の違いとは, 例えば  $x$  が  $a$  より小さくて  $a$  に近づくのか,  $a$  より大きくて  $a$  に近づくのか, という違いです。前者の場合のみ得られる極限を**左極限**, 後者の場合のみ得られる極限を**右極限**といい, それぞれ  $\lim_{x \rightarrow a-0}$ ,  $\lim_{x \rightarrow a+0}$  と書きます。

### 関数の連続性と一様連続性

関数  $f(x)$  の  $x \rightarrow a$  の極限が  $f(a)$  であるとき,  $f(x)$  は  $a$  で**連続**であるといいます。  $\varepsilon$ - $\delta$  論法で書くと

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad (7)$$

となります。さらに, 関数  $f(x)$  が区間  $I$  のどの点でも連続のとき,  $f(x)$  は区間  $I$  で連続といいます。

さて,  $\varepsilon$ - $\delta$  論法を用いると, 同じ「 $x = a$  で連続」な関数にも「連続の程度」を考えることができます。つまり,  $f(x)$  と  $f(a)$  の隔たりがある  $\varepsilon$  より小さくなると,  $x$  と  $a$  との隔たりをどのくらい小さくすればよいか, つまり  $\delta$  をどのくらい小さくすればよいか, という問題です (図 2)。

区間  $I$  内のどの点  $a$  についても,  $f(x)$  と  $f(a)$  の隔たりをある  $\varepsilon$  より小さくするためには,  $x$  と  $a$  との隔たりをひとつの**共通の**  $\delta$  より小さくすればよいとき,  $f(x)$  は区間  $I$  で**一様連続**であるといいます。

区間  $I$  が閉区間なら,  $\delta$  は区間内で必要な最小のものにすればよいので, 区間  $I$  で連続な関数はつねに一様連続です<sup>3</sup>。しかし, 区間  $I$  が开区間のときは, 「連続なのに一様連続でない」関数があります。

例えば, 区間  $[0, 1)$  で関数  $f(x) = \frac{1}{x-1}$  を考えます (図 3)。この区間内では,  $x$  が 1 にいくらでも近づけば,  $x$  のどんな小さな変化に対しても,  $f(x)$  はいくらでも大きく変化します。したがって, ひとつの  $f(x)$  と  $f(a)$  の隔たり  $\varepsilon$  に対して, 区間内で共通の  $\delta$  をとることができず, 一様連続ではありません。

もう少し正確に書いてみましょう。  $x_n = 1 - \frac{1}{2n}$ ,  $a_n = 1 - \frac{1}{n}$  とすると,  $x_n - a_n = \frac{1}{2n}$  で,  $|f(x_n) -$

<sup>3</sup>正確な証明は略します。

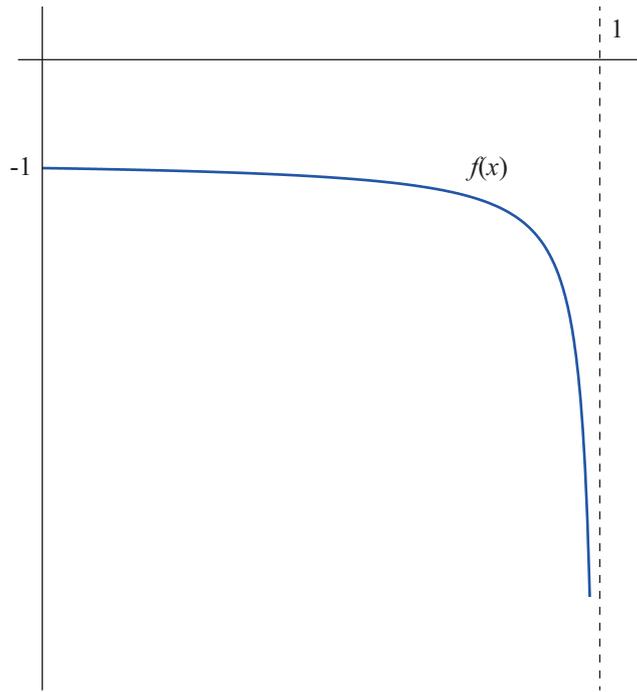


図 3: 連続だが一様連続でない関数

$f(a_n) = n$  です。ですから、 $n$  を大きくすれば  $x_n$  と  $a_n$  の隔たりをある  $\delta$  よりも小さくすることはできませんが、そのとき  $f(x_n)$  と  $f(a_n)$  の隔たりを  $\varepsilon$  より小さくすることはできません。

### 関数列の収束

ここまでの知識を用いると、数列でなく「関数の列」 $f_1(x), f_2(x), \dots$  の収束を考えることができます。つまり、 $n \rightarrow \infty$  のとき、区間  $I$  の各点  $x$  で  $|f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$  となることを、関数列  $f(x)$  は区間  $I$  で **各点収束** するといいます。

ここで、一様連続の説明で述べた「連続の程度」と同じように、区間  $I$  内の各点での「収束の程度」を考えます。すると、関数列である番号  $N$  より先の関数  $f_n(x)$  ( $n > N$ ) については、区間  $I$  内の どの点  $x$  でも  $f_n(x)$  と  $f(x)$  の隔たりを  $\varepsilon$  より小さくできる、という収束のしかたを考えることができます。これを、関数列  $f(x)$  は区間  $I$  で **一様収束** するといいます。

### 問題

数列  $\{a_n\} = 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \dots, \frac{1}{n^2}$  は  $n \rightarrow \infty$  のとき収束することを、 $\varepsilon - N$  論法で示してください。

### 参考文献

- 細井勉, わかるイプシロン・デルタ, 日本評論社, 1995. ISBN978-4-53578-217-4  
 瀬山士郎, 「無限と連続」の数学—微分積分学の基礎理論案内, 東京図書, 2005. ISBN978-4-48900-708-8  
 齋藤正彦, 微分積分学, 東京図書, 2006. ISBN978-4-48900-732-3