

なんかごまかされている気がする

微分を初めて習った時, 例えば「 $f(x) = x^2$ を x で微分せよ」という問題を次のように説明されたと思います。

$$\begin{aligned} \frac{df(x)}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x+h) = 2x \end{aligned} \tag{1}$$

上の説明では, 3行目で「 h は 0 に近づいているだけで, まだ 0 ではないから」といつて h で割っているのに, 4行目では「 h は 0」としています。これはおかしくありませんか?

この問題を解決するには, 「収束」を正確に理解する必要があります。今日は, 「限りなく近づく」という言葉で表されている「収束」について考えてみます。

数列の収束

「数列 $\{a_n\}$ が α に収束する」とは, 数学では次のような意味だと理解されています。

α のまわりにどんなに狭い区間 $[\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$ を設定しても¹,
数列が十分大きな番号 N まで進めば,
 N 番より大きな番号 n については, a_n はみなその狭い区間 $[\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$ に入る。

これを, 数学の表現では

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N; n > N \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon \tag{2}$$

と書き, これを **$\varepsilon - N$ 論法**とよびます。図1の「4コマ漫画」で, この様子を説明しています。

同様に, 「 $n \rightarrow \infty$ のとき, 数列 $\{a_n\}$ が ∞ に発散する」とは

どんなに大きな数 G をもってきて,
数列が十分大きな番号 N まで進めば,
 N 番より大きな番号 n については, a_n は G より大きくなる。

すなわち

$$\forall G, \exists N; n > N \Rightarrow a_n > G \tag{3}$$

¹“ ε ” は, 数学ではしばしば「すごく小さな (好きなだけ小さくできる) 正の数をさします。

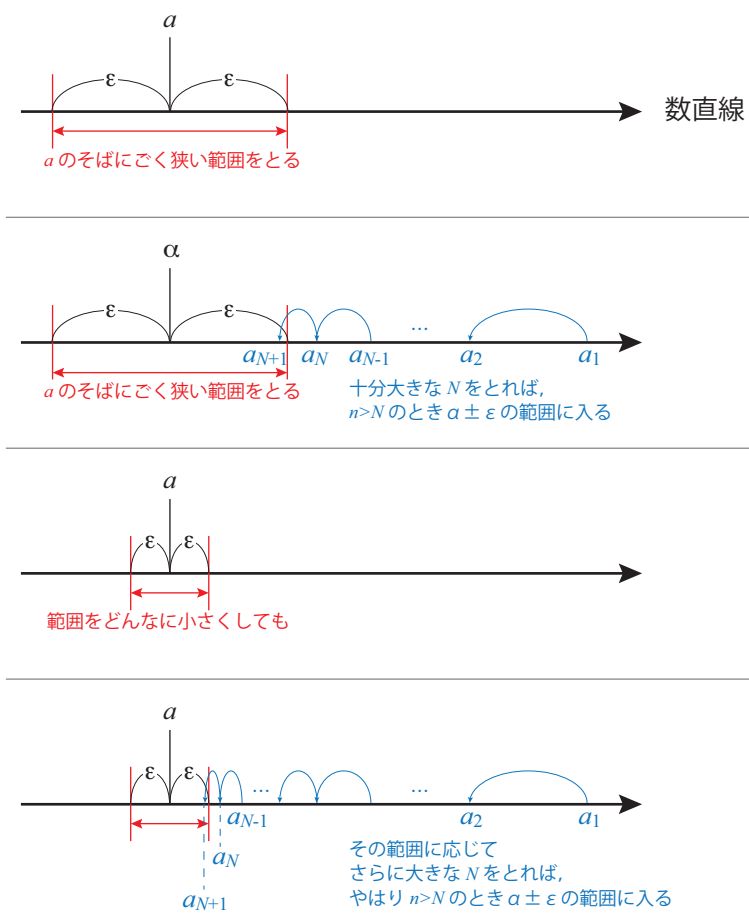


図 1: ϵ - N 論法

であることを意味しています。

このような収束や発散の理解では、 ϵ は好きなように小さくできますが、あくまで正の数であって、0 ではありません。 G は好きなように大きくできますが、あくまである有限の数であって、「無限」ではありません。

つまり、「限りなく近づく」とは「隔たりを必要に応じて好きなだけ小さくすることができる」という意味であり、「限りなく大きくなる」とは「必要に応じて好きなだけ大きくすることができる」という意味であって、「無限に近づく」「無限に大きくなる」という意味を入れずに定義されているのです。

実数の連続性の、もうひとつの公理

前回説明した、実数の連続性を述べる 4 つの公理のうち、「実数の有界な単調数列は収束する」ことに関しては、前回は説明していませんでした。これを、「実数からなる集合が上(下)に有界であれば、必ず上限(下限)が存在する」という Weierstrass の定理から導いてみます。

なお、数列 $\{a_n\}$ が単調増加であるとは、 $a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots$ であることをいいます。不等号に等号がついて " \leq " になっている場合は広義の単調増加 (あるいは単調非減少) といいます。単調減少は不等号が逆の場合です。

単調に増加する数列 $\{a_n\}$ が有界ならば、Weierstrass の定理により上限 α が存在します。このとき、 $\alpha' < \alpha$ となるような α' を用意します。この数列は単調増加ですから、ある番号 p 以降の a_n ($n > p$) は、 α' よりも大きく、一方上限 α 以下ではあるはずで、つまり $\alpha' < a_n \leq \alpha$ ($n > p$) です。よって、 α と a_n の隔たりは α と α' の隔たりよりも小さい、すなわち $|\alpha - a_n| < \alpha - \alpha'$ となります。 α' は、 α より小さければどれだけ α に近くてもよいので、 $\alpha - \alpha'$ を上の収束の定義の ε と考えると、 $\{a_n\}$ は α に収束することがわかります。■

例題

$a > 0$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ であることを証明せよ。

$k > 2a$ であるような番号 k をもってきて、 $\frac{a^k}{k!} = C$ とおきます。すると、 $n > k$ のとき

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a^k}{k!} \times \frac{a}{k+1} \times \frac{a}{k+2} \times \cdots \times \frac{a}{n} = C \times \frac{a}{k+1} \times \frac{a}{k+2} \times \cdots \times \frac{a}{k+(n-k)} \quad (4)$$

で、 $k > 2a$ ですから

$$\begin{aligned} \frac{a^n}{n!} &< C \times \frac{a}{2a+1} \times \frac{a}{2a+2} \times \cdots \times \frac{a}{2a+(n-k)} \\ &< C \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \frac{C \cdot 2^k}{2^n} < \frac{C \cdot 2^k}{n} \end{aligned} \quad (5)$$

とすることができます。そこで、ある (小さな) 正の数 ε をもってきて、 $n > \frac{C \cdot 2^k}{\varepsilon}$ となる n を考えると、上の式に代入して $\frac{a^n}{n!} < \varepsilon$ となります。すなわち、 $\frac{a^n}{n!}$ は 0 に収束します。■

関数の極限

ここまで述べた数列の収束と同じ論法を使って、「関数 $f(x)$ の $x \rightarrow a$ の極限が A である」すなわち $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ であることは、次のように定義されます。

どんなに小さな正の数 ε を持ってきても、
 x と a の隔たりをある δ より小さくすれば、
 $f(x)$ と A の隔たりも ε より小さくできる。

これを、数学の表現では

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \quad (6)$$

と書きます。この表現を **ε - δ 論法** とよびます²。

この定義で、最初に述べた微分の問題を考えてみると、 $h \rightarrow 0$ という表現では、 h は δ より小さいだけであってあくまで 0 ではないので、割り算をしてもいい、ということになります。最後の行で $h = 0$ としているのは、収束する先が $h = 0$ とした時の値と同じ、というだけです。

² ε - N 論法も ε - δ 論法に含めて、総称して ε - δ 論法ということもあります。

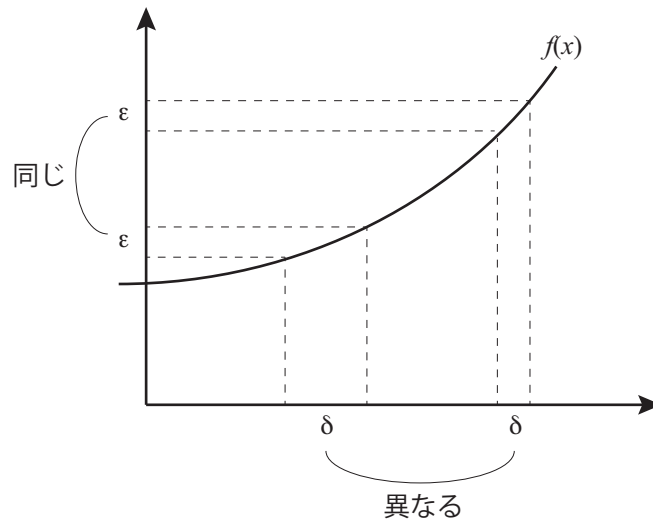


図 2: 同じ ε に対しても, 必要な「 δ の小ささ」は異なる

なお, 関数の極限については「上のことが x が a にどの方向から近づいてもなりたつとき」という条件がついています。「方向」の違いとは, 例えば x が a より小さくて a に近づくのか, a より大きくて a に近づくのか, という違いです。前者の場合のみ得られる極限を**左極限**, 後者の場合のみ得られる極限を**右極限**といい, それぞれ $\lim_{x \rightarrow a-0}$, $\lim_{x \rightarrow a+0}$ と書きます。

関数の連続性と一様連続性

関数 $f(x)$ の $x \rightarrow a$ の極限が $f(a)$ であるとき, $f(x)$ は a で**連続**であるといいます。 ε - δ 論法で書くと

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad (7)$$

となります。さらに, 関数 $f(x)$ が区間 I のどの点でも連続のとき, $f(x)$ は区間 I で連続といいます。

さて, ε - δ 論法を用いると, 同じ「 $x = a$ で連続」な関数にも「連続の程度」を考えることができます。つまり, $f(x)$ と $f(a)$ の隔たりがある ε より小さくなると, x と a との隔たりをどのくらい小さくすればよいか, つまり δ をどのくらい小さくすればよいか, という問題です (図 2)。

区間 I 内のどの点 a についても, $f(x)$ と $f(a)$ の隔たりをある ε より小さくするためには, x と a との隔たりをひとつの**共通の** δ より小さくすればよいとき, $f(x)$ は区間 I で**一様連続**であるといいます。

区間 I が閉区間なら, δ は区間内で必要な最小のものにすればよいので, 区間 I で連続な関数はつねに一様連続です³。しかし, 区間 I が开区間のときは, 「連続なのに一様連続でない」関数があります。

例えば, 区間 $[0, 1)$ で関数 $f(x) = \frac{1}{x-1}$ を考えます (図 3)。この区間内では, x が 1 にいくらでも近づけば, x のどんな小さな変化に対しても, $f(x)$ はいくらでも大きく変化します。したがって, ひとつの $f(x)$ と $f(a)$ の隔たり ε に対して, 区間内で共通の δ をとることができず, 一様連続ではありません。

もう少し正確に書いてみましょう。 $x_n = 1 - \frac{1}{2n}$, $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ とすると, $x_n - a_n = \frac{1}{2n}$ で, $|f(x_n) -$

³正確な証明は略します。

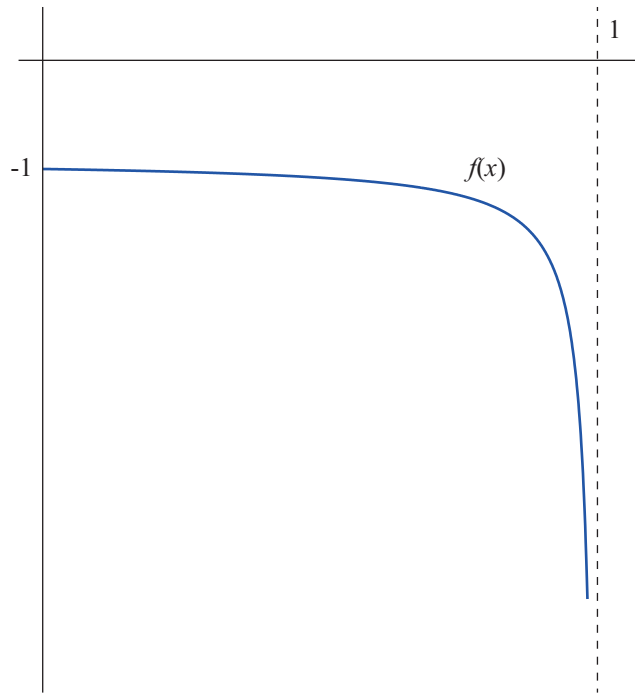


図 3: 連続だが一様連続でない関数

$f(a_n) = n$ です。ですから、 n を大きくすれば x_n と a_n の隔たりをある δ よりも小さくすることはできませんが、そのとき $f(x_n)$ と $f(a_n)$ の隔たりを ε より小さくすることはできません。

関数列の収束

ここまでの知識を用いると、数列でなく「関数の列」 $f_1(x), f_2(x), \dots$ の収束を考えることができます。つまり、 $n \rightarrow \infty$ のとき、区間 I の各点 x で $|f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$ となることを、関数列 $f(x)$ は区間 I で **各点収束** するといいます。

ここで、一様連続の説明で述べた「連続の程度」と同じように、区間 I 内の各点での「収束の程度」を考えます。すると、関数列である番号 N より先の関数 $f_n(x)$ ($n > N$) については、区間 I 内の どの点 x でも $f_n(x)$ と $f(x)$ の隔たりを ε より小さくできる、という収束のしかたを考えることができます。これを、関数列 $f(x)$ は区間 I で **一様収束** するといいます。

問題

数列 $\{a_n\} = 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \dots, \frac{1}{n^2}$ は $n \rightarrow \infty$ のとき収束することを、 $\varepsilon - N$ 論法で示してください。

参考文献

細井勉, わかるイプシロン・デルタ, 日本評論社, 1995. ISBN978-4-53578-217-4
 瀬山士郎, 「無限と連続」の数学—微分積分学の基礎理論案内, 東京図書, 2005. ISBN978-4-48900-708-8
 齋藤正彦, 微分積分学, 東京図書, 2006. ISBN978-4-48900-732-3