

2016年度秋学期 応用数学（解析） 第5回

第2部・基本的な微分方程式
微分方程式とは，変数分離形

浅野 晃
関西大学総合情報学部



微分方程式とは

微分方程式とは

ふつうの方程式は，解は「数」

$$x^2 - 5x + 3 = 0$$

微分方程式は，解が「関数」で，
その微分が含まれる方程式

x が t の関数（つまり $x(t)$ ）のとき，

$$x' = x$$

関数は「量の変化」

$$x'' - 5x' + 6x = 0$$

微分方程式は「変化の条件」

微分方程式を解くと，「どう変化するか」がわかる

1階・2階，常微分・偏微分

1階導関数に関する微分方程式：

1階微分方程式 $x' = x$

2階導関数に関する微分方程式：

2階微分方程式 $x'' - 5x' + 6x = 0$

⋮

1変数関数の微分方程式は常微分方程式

2変数以上の関数の偏微分に関する

微分方程式は偏微分方程式

微分方程式を解くとは

微分方程式を「解く」とは、
その方程式を満たす関数を見つけること

微分方程式は
特定のパターンのものしか解けない

解ける微分方程式の基本的なパターンを
いくつか紹介します。

微分方程式の例

運動方程式

物体に働く力と、その運動との関係

力 F

物体の質量 m

$$F = ma$$

物体の加速度 a

加速度は速度の微分、
速度は位置の微分だから、
時刻 t の物体の位置を $x(t)$
とすると

$$F = mx''$$

これを解いて関数 $x(t)$ を求めると、
時刻 t での物体の位置がわかる

落下の問題

物体が空気中を落下するとき

力 F

= 下向きの重力 mg

+ 上向きの抵抗力

抵抗力は速度の2乗に比例する $-k(x')^2$

運動方程式は

$$F = mx'' \text{ なので } mg - k(x')^2 = mx''$$

放射性物質の崩壊

崩壊の速度は、現在存在する物質の量に比例する

時刻 t の時点で存在する物質の量を $x(t)$ とすると

$$x' = -kx$$

一般解・特殊解・特異解

一般解と特殊解

時刻 t の時点で存在する物質の量を $x(t)$ とすると

$$x' = -kx$$

定数 k が決まったら、解はひとつの関数に決まるか？

決まらない

最初 $t = 0$ に存在する

物質の量 $x(0)$ が

わからないと

解はひとつに決まらない

初期値という

一般解と特殊解

初期値が定まったときに求められる解を特殊解(particular solution)という

初期値が定まっていなくて、初期値を代入したらひとつの特殊解が求められるような形の解を

一般解(general solution)という

例: $x(t) = C \exp(-kt)$

初期値が定まっていなくて、はじめて決まるパラメータ

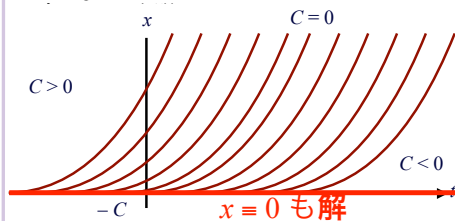
特異解と解の一意性

$$x' = x^{\frac{1}{3}} \text{ の一般解 } x = \left\{ \frac{2}{3}(t+C) \right\}^{\frac{3}{2}} \quad (C \text{ は定数})$$

$$\begin{aligned} \text{(なぜならば)} \quad x' &= \frac{3}{2} \left\{ \frac{2}{3}(t+C) \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{2}{3} \\ &= \left\{ \frac{2}{3}(t+C) \right\}^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

一般解

$$x = \left\{ \frac{2}{3}(t+C) \right\}^{\frac{3}{2}}$$



でも、 $x \equiv 0$ も解では？

一般解 $x = \left\{ \frac{2}{3}(t+C) \right\}^{\frac{3}{2}}$ には
Cをどう変えても含まれない

特異解(singular
solution)という

2016年度秋学期

特異解と解の一意性

初期値がひとつ定まったときに、
解がひとつだけに決まることを、
解が一意(unique)であるという

一意性の十分条件のひとつ「リプシッツ条件」

微分方程式が $x'(t) = f(t, x)$ のとき、
初期値のまわりでどんな x_1, x_2 についても

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$$

となる定数 L があるなら、その初期値について一意

x のわずかな変化について、
 f がいくらでも大きく変化する、ということはない

2016年度秋学期

変数分離形

変数分離形

$x' = -kx$ を解く

$$\frac{dx}{dt} = -kx \text{ と直す } x \neq 0 \text{ として } \frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = -k \text{ と変形する}$$

$$\text{両辺を } t \text{ で積分 } \int \frac{1}{x} \frac{dx}{dt} dt = \int (-k) dt$$

$$\text{置換積分をする } \int \frac{1}{x} dx = \int (-k) dt$$

$$\begin{aligned} \text{積分を解く } \int \frac{1}{x} dx &= - \int k dt \\ \log |x| + C_1 &= -kt + C_2 \end{aligned}$$

C_1, C_2 は
積分定数

2016年度秋学期

変数分離形

$x' = -kx$ を解く

積分を解く $\int \frac{1}{x} dx = - \int k dt$

$$\log |x| + C_1 = -kt + C_2$$
$$\log |x| = -kt + (C_2 - C_1)$$
$$x = \pm \exp\{-kt + (C_2 - C_1)\}$$
$$x = \pm \exp(C_2 - C_1) \exp(-kt)$$

$\pm \exp(C_2 - C_1)$ をあらためて定数 C とすると

一般解は $x(t) = C \exp(-kt)$

さっき $x \neq 0$ としたが, $x \equiv 0$ も解で, 一般解に含まれる。

2016年度秋学期

A. Asano, Kansai Univ.

変数分離形

$x' = -kx$ を解くとき, ふつうは

$$\frac{dx}{dt} = -kx \text{ から } \frac{dx}{x} = -k dt \text{ と, 分数の計算のよう変形し}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \int (-k) dt \text{ と積分する}$$

x が左辺, t が右辺に分離しているので
変数分離形という

2016年度秋学期

A. Asano, Kansai Univ.

変数分離形

一般には $g(x)x' = f(t)$

$$x' = \frac{dx}{dt} \text{ とすると } g(x)dx = f(t)dt$$

両辺それぞれを
積分すると $\int g(x)dx = \int f(t)dt + C$

一般解に含まれる積分定数 C は,
初期値を代入して定まり, 特殊解が得られる

2016年度秋学期

A. Asano, Kansai Univ.

例題

A. Asano, Kansai Univ.

例題

$9x \cdot x' + 4t = 0$ を解いて

一般解を求めよ。

$x(3) = 2$ とするときの特殊解を求めよ。

$x' = \frac{dx}{dt}$ として変数分離すると $9x dx = -4t dt$

両辺それぞれを積分すると $\frac{9}{2}x^2 = -2t^2 + C_0$

$$\text{すなわち } \frac{t^2}{9} + \frac{x^2}{4} = C_1$$

($t-x$ 平面の楕円群)

2016年度秋学期

例題

$9x \cdot x' + 4t = 0$ を解いて

一般解を求めよ。

$x(3) = 2$ とするときの特殊解を求めよ。

一般解は $\frac{t^2}{9} + \frac{x^2}{4} = C_1$

初期値が $x(3) = 2$ なので

$t = 3$ のとき $x = 2$ だから、代入すると $C_1 = 2$

$$\text{特殊解は } \frac{t^2}{9} + \frac{x^2}{4} = 2$$

2016年度秋学期

今日のまとめ

微分方程式は、関数とその微分に関する
方程式

解は数ではなく関数

解ける方程式のパターンは限ら
れている

もっとも基本的なパターン
「変数分離形」

2016年度秋学期