# 2016 年度秋学期　応用数学（解析）　第７回

## 第２部・基本的な微分方程式／　２階線形微分方程式 (1)

２階線形微分方程式は，力学における振動を表す方程式など，さまざまな科学に現れる重要な方程式です。この講義では，一般的な線形微分方程式における理論にもふれながら，２回にわたって説明することにします。

### ２階線形微分方程式とは

関数 $x(t)$ についての**２階線形微分方程式**とは，次の形のものをいいます。

$$x'' + P(t)x' + Q(t)x = R(t) \tag{1}$$

このうち，右辺が恒等的に 0 であるものを**斉次**，そうでないものを**非斉次**の方程式といいます。

もっとも簡単な２階線形微分方程式は，$P(t)$ や $Q(t)$ が定数の斉次方程式で，$a, b$ を定数として

$$x'' + ax' + bx = 0 \tag{2}$$

と表されます。

この方程式の解として，まず $x \equiv 0$ が浮かびます。これは**自明解**とよばれています。また，かりに $x(t) = e^{\lambda t}$ としてみて，これを方程式に代入してみると

$$\begin{gathered} \lambda^2 e^{\lambda t} + a\lambda e^{\lambda t} + b e^{\lambda t} = 0 \\ \left(\lambda^2 + a\lambda + b\right) e^{\lambda t} = 0 \end{gathered} \tag{3}$$

となりますから，$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ を満たす $\lambda$ について，$x(t) = e^{\lambda t}$ は解（$t = 0$ のとき $x(0) = 1$ となる特殊解）です。また，その定数倍も解です。

さらに，$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ は $\lambda$ の２次方程式ですから，これを満たす $\lambda$ はたいてい２つあります。よって，これらを $\lambda_1, \lambda_2$ とすると，$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$（$C_1, C_2$ は定数）が解ということになります。$C_1 = C_2 = 0$ とすると $x(t) \equiv 0$ になりますから，この解は自明解を含んでいます。

### こんなんでいいのでしょうか

さっき求めた $C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$ という解は，一般解のように見えますが，本当にそうなのでしょうか。なにしろ，この解は $x(t) = e^{\lambda t}$ と勝手において求めた解なのです。

この解が一般解であるということは，次の２つが正しいことと同じです。

1. この微分方程式の解が一意であること。すなわち，初期値 $x(t_0), x'(t_0)$ を定めると解がひとつに定まること。
2. この微分方程式の 1 次独立な 2 つの特殊解を $x_1(t), x_2(t)$ とするとき，$C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t)$（$C_1, C_2$ は定数）がこの方程式の一般解になっていること。

2. について，「２つの関数が 1 次独立」というのは，$C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) = 0$ がすべての $t$ について満たされるのは $C_1 = C_2 = 0$ のときだけである，という意味です。2. は，線形代数の言葉では「この方程式の解全体は，2 次元ベクトル空間をなす」と言います。

この２つの条件が正しければ，さきほど勝手に $x(t)=e^{\lambda t}$ とおいて求めた解でも，$\lambda_1 \neq \lambda_2$ であれば $e^{\lambda_1 t}$ と $e^{\lambda_2 t}$ は明らかに１次独立ですから，$\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)$ の形で一般解が表され，他の解はない，ということになります。

#### 線形微分方程式に関する定理

上の２つの条件は，２階線形微分方程式だけでなく，一般の斉次形 $n$ 階微分方程式についてなりたつことが知られています。しかも，定数係数でない場合にもなりたちます。そこで，何階線型微分方程式でも同じ形で表せる方法をまず考えます。

(1) 式の２階線形微分方程式は，$x_1=x, x_2=x'$ とおくと，

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= -Q(t)x_1 - P(t)x_2 + R(t) \end{aligned} \tag{4}$$

という連立微分方程式となります。この式は行列とベクトルを使って

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -Q(t) & -P(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ R(t) \end{pmatrix} \tag{5}$$

と表せますから，

$$\boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t) \tag{6}$$

という，ベクトルについての１階線形微分方程式で表すことができます。一般の $n$ 階線形微分方程式も，同様の操作によって (6) 式の形で表すことができます。

**条件 1. がなりたつことの証明**　まず，1. の解の一意性について，証明の概略を示します。これは斉次形でなくてもなりたちます。

ここで，行列やベクトルの大きさを表す「ノルム」を記号 $\|\cdot\|$ で表します。例えば，「要素の２乗の合計のルート」はノルムの一種で，ユークリッドノルムといいます。

(6) 式の右辺について，

$$\|(A(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}(t)) - (A(t)\boldsymbol{y}+\boldsymbol{b}(t))\| = \|A(t)\boldsymbol{x} - A(t)\boldsymbol{y}\| \leqq \|A(t)\|\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| \tag{7}$$

となるノルムが存在します。たとえば，ユークリッドノルムではそうなります。そこで，問題の関数を連続関数とすると，それを考えている区間内の任意の有界閉区間に対しては，ノルムが連続であることから $\|A(t)\|$ には上限が存在します。

このことは，(6) 式の１階微分方程式について，Lipschitz 条件（講義第５回参照）が成り立っていることを示しています。したがって，この微分方程式の解は一意です。■

**条件 2. がなりたつことの証明**　次に，斉次形の方程式 $\boldsymbol{x}'=A(t)\boldsymbol{x}$ について，2. の「解が $n$ 次元ベクトル空間をなす」ことの証明を示します。

$n$ 階の方程式の場合，ベクトル $\boldsymbol{x}$ は $n$ 次元です。そこで，$n$ 次元の基本ベクトル

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_1 &= (1,0,\cdots,0) \\ \boldsymbol{e}_2 &= (0,1,\cdots,0) \\ &\vdots \\ \boldsymbol{e}_n &= (0,0,\cdots,1) \end{aligned} \tag{8}$$

を考えて，

$$\begin{aligned}
&\text{初期値}\,\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{e}_1\text{をみたす}\,\boldsymbol{x}'=A(t)\boldsymbol{x}\,\text{の特殊解を}\boldsymbol{\xi}_1(t)\text{，すなわち}\boldsymbol{\xi}_1(t_0)=\boldsymbol{e}_1\\
&\text{初期値}\,\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{e}_2\text{をみたす特殊解を}\boldsymbol{\xi}_2(t)\text{，すなわち}\boldsymbol{\xi}_2(t_0)=\boldsymbol{e}_2\\
&\qquad\qquad\vdots\\
&\text{初期値}\,\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{e}_n\text{をみたす特殊解を}\boldsymbol{\xi}_n(t)\text{，すなわち}\boldsymbol{\xi}_n(t_0)=\boldsymbol{e}_n
\end{aligned}\tag{9}$$

とします。

$\boldsymbol{x}'=A(t)\boldsymbol{x}$ の一般解を $\boldsymbol{x}(t)$ とすると，$t=t_0$ のときの任意の初期値は

$$\boldsymbol{x}(t_0)=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{e}_n \tag{10}$$

の形で表すことができます。

一方，特殊解 $\boldsymbol{\xi}_1(t),\boldsymbol{\xi}_2(t),\ldots,\boldsymbol{\xi}_n(t)$ は 1 次独立です。なぜならば，

$$c_1\boldsymbol{\xi}_1(t)+c_2\boldsymbol{\xi}_2(t)+\cdots+c_n\boldsymbol{\xi}_n(t)=\boldsymbol{0} \tag{11}$$

がなりたっているとする時，$t=t_0$ でもなりたつので代入すると，

$$\begin{aligned}
c_1\boldsymbol{\xi}_1(t_0)+c_2\boldsymbol{\xi}_2(t_0)+\cdots+c_n\boldsymbol{\xi}_n(t_0)&=\boldsymbol{0}\\
(9)\,\text{式より}\quad c_1\boldsymbol{e}_1+c_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+c_n\boldsymbol{e}_n&=\boldsymbol{0}
\end{aligned}\tag{12}$$

となります。$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_n$ は 1 次独立ですから，これがなりたつのは $c_1=c_2=\cdots=c_n=0$ のときです。よって $\boldsymbol{\xi}_1(t),\boldsymbol{\xi}_2(t),\ldots,\boldsymbol{\xi}_n(t)$ も 1 次独立です。

一方，特殊解 $\boldsymbol{\xi}_1(t),\boldsymbol{\xi}_2(t),\ldots,\boldsymbol{\xi}_n(t)$ の 1 次結合 $x_1\boldsymbol{\xi}_1(t)+x_2\boldsymbol{\xi}_2(t)+\cdots+x_n\boldsymbol{\xi}_n(t)$ を考えると，$t=t_0$ のときはやはり (9) 式から，

$$\begin{aligned}
&x_1\boldsymbol{\xi}_1(t_0)+x_2\boldsymbol{\xi}_2(t_0)+\cdots+x_n\boldsymbol{\xi}_n(t_0)\\
&=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{e}_n
\end{aligned}\tag{13}$$

となります。

このことは，一般解 $\boldsymbol{x}(t)$ と上記の特殊解の 1 次結合 $x_1\boldsymbol{\xi}_1(t)+x_2\boldsymbol{\xi}_2(t)+\cdots+x_n\boldsymbol{\xi}_n(t)$ は，(10) 式と (13) 式により，同じ初期条件 $t=t_0$ で同じ初期値 $x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{e}_n$ をもつ解であることを意味します。条件 1. で解の一意性が示されていますから，

$$\boldsymbol{x}(t)=x_1\boldsymbol{\xi}_1(t)+x_2\boldsymbol{\xi}_2(t)+\cdots+x_n\boldsymbol{\xi}_n(t) \tag{14}$$

となります。すなわち，1 次独立な $n$ 個の特殊解の 1 次結合で一般解が表されます。■

---

### 定数係数の斉次形２階線形微分方程式を解く

もう一度，はじめにあげた定数係数の斉次形 2 階線形微分方程式 $x''+ax'+bx=0$ を解くことを考えます。

この微分方程式については，$\lambda^2+a\lambda+b=0$ を満たす $\lambda$ について，$x(t)=e^{\lambda t}$ は解であることは，はじめの方で述べました。この，$\lambda$ についての２次方程式 $\lambda^2+a\lambda+b=0$ を**特性方程式**といいます。この微分方程式の一般解は，特性方程式の解の形によって異なります。

**1. 特性方程式が２つの異なる実数解を持つ場合**　この場合，２つの異なる実数解を $\lambda_1, \lambda_2$ とすると，$e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}$ が１次独立な解なので，これらの１次結合である $x(t)=C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t}$（$C_1, C_2$ は任意の定数）が一般解となります。前節の説明のとおり，これですべての解を表しています。

**2. 特性方程式が２つの異なる虚数解を持つ場合**　この場合，２つの解は $\alpha+i\beta, \alpha-i\beta$ の形になっているので，一般解は $x(t)=C_1e^{(\alpha+i\beta)t}+C_2e^{(\alpha-i\beta)t}$ と表されます。この解は

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1e^{(\alpha+i\beta)t}+C_2e^{(\alpha-i\beta)t} \\ &= e^{\alpha t}\left(C_1e^{i\beta t}+C_2e^{-i\beta t}\right) \\ &= e^{\alpha t}\left(C_1(\cos(\beta t)+i\sin(\beta t))+C_2(\cos(\beta t)-i\sin(\beta t))\right) \\ &= e^{\alpha t}\left((C_1+C_2)\cos(\beta t)+i(C_1-C_2)\sin(\beta t)\right) \end{aligned} \tag{15}$$

となり，定数をおきなおすと $x(t)=e^{\alpha t}\left(C_1\cos(\beta t)+C_2\sin(\beta t)\right)$ という三角関数の形で表されます[1]。つまり，解が振動を表しています。これについては，先の講義で物理学の例をあげて説明する予定です。

**3. 特性方程式が重解を持つ場合**　この場合は，特性方程式の解を $\lambda_1$ とすると，微分方程式の解は $C_1e^{\lambda_1 t}$ しか出てきませんので，これと１次独立なもう一つの解をさがす必要があります。

結論からいうと，その解は $te^{\lambda_1 t}$ です。なぜならば，

$$\begin{aligned} (te^{\lambda_1 t})' &= \lambda_1te^{\lambda_1 t}+e^{\lambda_1 t}=(\lambda_1t+1)e^{\lambda_1 t} \\ (te^{\lambda_1 t})'' &= \lambda_1(\lambda_1t+1)e^{\lambda_1 t}+\lambda_1e^{\lambda_1 t}=(\lambda_1^2t+2\lambda_1)e^{\lambda_1 t} \end{aligned} \tag{16}$$

ですから，これを微分方程式の左辺に代入すると

$$\begin{aligned} &(\lambda_1^2t+2\lambda_1)e^{\lambda_1 t}+a\lambda_1te^{\lambda_1 t}+bte^{\lambda_1 t} \\ &=\{\lambda_1^2+a\lambda_1+b\}te^{\lambda_1 t}+(2\lambda_1+a)e^{\lambda_1 t} \end{aligned} \tag{17}$$

となります。(17) 式の第１項については，$\lambda_1$ が特性方程式の解であることから $\{\}$ 内が $0$ となります。第２項については，特性方程式の解と係数の関係から $2\lambda_1=-a$ なので，() 内が $0$ となります。よって，$te^{\lambda_1 t}$ は微分方程式の解であり，また明らかに $e^{\lambda_1 t}$ とは１次独立ですから，一般解は $C_1e^{\lambda_1 t}+C_2te^{\lambda_1 t}$（$C_1, C_2$ は定数）となります。

しかし，いきなり「$te^{\lambda_1 t}$ も解」といわれても，どうやってそんなものを見つけたのでしょうか？ これは，次のようなテクニックで求められます。

最初に求められた解 $C_1e^{\lambda_1 t}$ について，$C_1$ が $t$ の関数 $C_1(t)$ であるとして，微分方程式に代入します。

$$\begin{aligned} (C_1e^{\lambda_1 t})' &= C_1'e^{\lambda_1 t}+\lambda_1C_1e^{\lambda_1 t}=(C_1'+\lambda_1C_1)e^{\lambda_1 t} \\ (C_1e^{\lambda_1 t})'' &= (C_1''+\lambda_1C_1')e^{\lambda_1 t}+\lambda_1(C_1'+\lambda_1C_1)e^{\lambda_1 t}=(C_1''+2\lambda_1C_1'+\lambda_1^2C_1)e^{\lambda_1 t} \end{aligned} \tag{18}$$

ですから，これらを代入すると

$$\begin{aligned} (C_1''+2\lambda_1C_1'+\lambda_1^2C_1)e^{\lambda_1 t}+a(C_1'+\lambda_1C_1)e^{\lambda_1 t}+bC_1e^{\lambda_1 t}&=0 \\ (C_1''+2\lambda_1C_1'+\lambda_1^2C_1)+a(C_1'+\lambda_1C_1)+bC_1&=0 \end{aligned} \tag{19}$$

[1] 指数が虚数の指数関数が三角関数で表されることは，先の講義で複素関数を扱うときにあらためて説明します。

となります。ここで，特性方程式が重解をもつことから判別式 $a^2-4b=0$ で，$b=\dfrac{a^2}{4}$ が得られます。また，さきほども述べた解と係数の関係から $2\lambda_1=-a$ すなわち $\lambda_1=-\dfrac{a}{2}$ です。これらを用いると

$$(C_1''-aC_1'+\frac{a^2}{4}C_1)+a(C_1'+-\frac{a}{2}C_1)+\frac{a^2}{4}C_1=0 \tag{20}$$

となり，整理すると $C_1''(t)=0$ となります。このことから，$C_1(t)$ は $C_1(t)=pt+q$（$p,q$ は定数）の形をしていることがわかるので，こちらの解は $(pt+q)e^{\lambda_1 t}$ となります。よって，一般解は前の解との 1 次結合 $C_1e^{\lambda_1 t}+(pt+q)e^{\lambda_1 t}$ で，あらためて定数をおきなおすと $C_1e^{\lambda_1 t}+C_2te^{\lambda_1 t}$（$C_1,C_2$ は定数）の形で表されることがわかります。この方法を**定数変化法**といいます。

### 例題

関数 $x(t)$ についての微分方程式 $x''-5x'+6x=0$ を，初期値 $x(0)=1,\ x'(0)=0$ として解いてください。

（解答）この方程式は斉次形 2 階線形微分方程式で，特性方程式は $\lambda^2-5\lambda+6=0$ です。これを解くと $\lambda=2,3$ で，このことから一般解は $x(t)=C_1e^{2t}+C_2e^{3t}$（$C_1,C_2$ は定数）となります。初期条件から $x(0)=C_1+C_2=1,\ x'(0)=2C_1+3C_2=0$ で，これらから $C_1=3,C_2=-2$ となります。よって求める特殊解は $3e^{2t}-2e^{3t}$ となります。■

---

### 問題

関数 $x(t)$ についての次の微分方程式を，示された初期条件のもとで解いてください。

1. $x''-2x'-3x=0,\ x(0)=0,\ x'(0)=4$
2. $x''+x=0,\ x(0)=1,\ x'(0)=1$
3. $x''-4x'+4x=0,\ x(0)=0,\ x'(0)=1$

### 参考文献

千葉逸人，これならわかる 工学部で学ぶ数学，プレアデス出版，2006. ISBN4-7687-0882-X
水田義弘，詳解演習　微分積分，サイエンス社，1998. ISBN4-7819-0891-8
後藤憲一，力学，学術図書，1999. ISBN978-4873-61040-5