2016 年度秋学期　応用数学（解析）　第１１回

第３部・微分方程式に関する話題／　振動と微分方程式

振動は，「ある方向に進めば進むほど，逆向きに進もうとする力が働く」ことによって，釣り合い位置から両方に交互に進む動作を繰り返す現象です。ニュートンの運動方程式によれば，質点[1]の運動は，質点の位置を x，質量を m，時刻を t，働く力を F とすると，加速度が位置の２階微分で表されることから

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2} \tag{1}$$

という微分方程式で表されます。そこで，この方程式で力 F がどう表されるかによって，さまざまな振動を分析することができます。

単振動

質点が釣り合い位置から変位したとき，釣り合い位置に戻ろうとする力を**復元力**といいます。釣り合い位置を原点とするとき，釣り合い位置からの距離に比例する復元力が働くとすると，復元力 F は $F = -kx$ と表すことができます（k は正の定数)。釣り合い位置からの方向と逆向きの力が働くので，マイナスがついています。

このとき，運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \tag{2}$$

となり，$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ とすると

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \tag{3}$$

となります。

この方程式は斉次形の２階線形微分方程式で，第７回で説明した方法で解くことができます。特性方程式は $\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$ で，特性方程式は２つの虚数解 $\lambda = \pm i\omega_0$ をもちます。よって，一般解は C_1, C_2 を定数として

$$x = C_1\cos(\omega_0 t) + C_2\sin(\omega_0 t) \tag{4}$$

と表されます。位置 x は実数ですから，C_1, C_2 はどちらも実数でなければなりません。また，三角関数を合成すると，$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$，$\phi = -\tan^{-1}(C_2/C_1)$ として

$$x = A\cos(\omega_0 t + \phi) \tag{5}$$

と表されます。

つまり，質点は x 軸上で $[-A, A]$ の範囲を往復する振動をすることになります。この運動を**単振動**といいます。時間 t を秒の単位で測るとき，ω_0 はコサインの引数になっている角度が１秒間に何ラジアン進むかを表し，**角振動数**とよばれます。また，１往復に必要な時間は，角度が 2π ラジアン進むのに必要な時間ですから $2\pi/\omega_0$ で，これを**周期**といいます。さらに，１秒間に往復する回数は，周期の逆数すなわち $\omega_0/2\pi$ で，これを**振動数**といいます。A は**振幅**といいます。

[1]質量はあるが大きさはないという，力学上の概念としての理想的な物体。

単振り子は単振動か？

糸が伸び縮みせず，支点での摩擦がなく，おもりが質点とみなせて，おもりが鉛直面内を円弧状に振動する理想的な振り子である「単振り子」は，振り子の周期が糸の長さだけで決まる「振り子の等時性」という言葉とともに，単振動の例によくあげられます。

図 1 は，振り子のおもりに働く力を図に示したものです。おもりの質量を m，重力加速度を g とすると，おもりには鉛直方向に mg の重力が働きます。このとき，軌道である円弧を x 軸として，振れ角を θ とすると，円弧の方向には $mg\sin\theta$ の大きさの力が働き，これが復元力の大きさとなります。

θ が小さいとき，$\sin\theta$ は θ で近似することができます。これは，$\sin\theta$ をマクローリン展開した[2]

$$\sin\theta = \frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots \tag{6}$$

において，θ が小さい時は右辺の第 2 項以降を無視できるからです。

$\sin\theta$ を θ で置き換えると，復元力の大きさは $mg\theta$ となりますが，糸の長さを L とするとき $\theta = \dfrac{x}{L}$（ラジアン）ですから，復元力の大きさは $\dfrac{mg}{L}x$ となります。復元力の向きは，x と逆向きの方向ですから，復元力は $-\dfrac{mg}{L}x$ と表されます。これを先に述べた単振動の式にあてはめると，$k = \dfrac{mg}{L}$ となり，単振動として扱えることがわかります。このとき，周期 $2\pi/\omega_0$ は，$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ ですから，

$$\frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{m\frac{L}{mg}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{7}$$

より，糸の長さ L と重力加速度 g だけで決まります。

これが「振り子の等時性」ですが，この性質は，「$\sin\theta$ が θ で近似できる」場合に限って成り立ちます。したがって，振り子を大きく振って θ が大きくなると，振り子の等時性は成り立たなくなります。

減衰振動

前節では，質点は復元力以外の力を受けないと考えましたが，それ以外に，質点の運動が速ければ速いほど，それをより妨げようとする力が働く場合を考えます。この力は**抵抗力**とよばれ，空気抵抗などがこれにあたります。

質点の速度は $\dfrac{dx}{dt}$ で表されますから，抵抗力は a を正の定数として $-a\dfrac{dx}{dt}$ で表されます。よって，運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - a\frac{dx}{dt} \tag{8}$$

となります。ここで，$\mu = \dfrac{a}{2m}$ とおきます。μ は抵抗係数とよばれる定数です。さらに前節の ω_0 も用いると，

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\mu\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \tag{9}$$

[2]次回の講義でこのことに触れます。

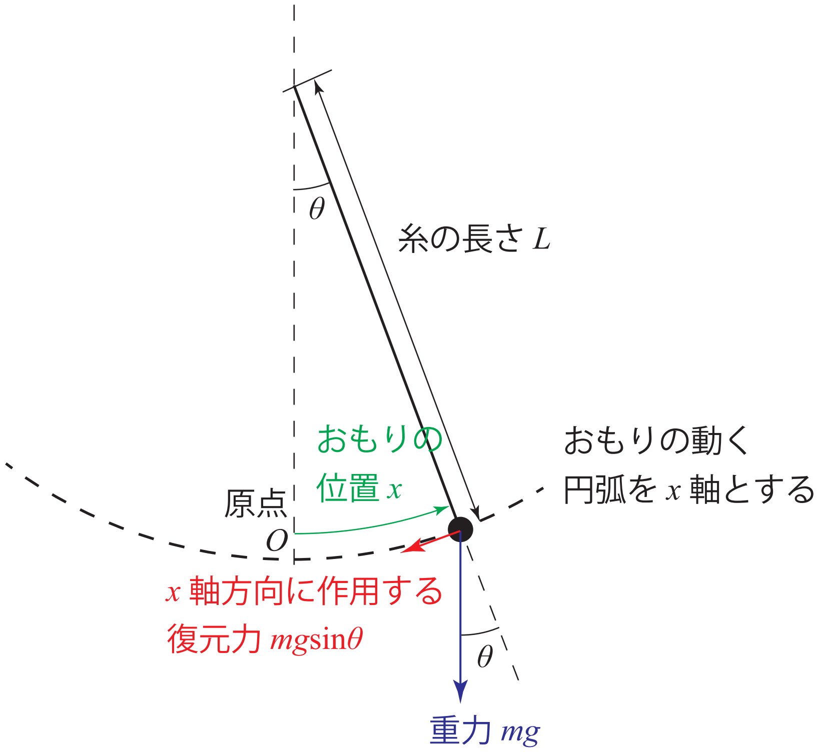

図 1: 単振り子

となります。

この方程式も前節と同じく斉次形の 2 階線形微分方程式です。特性方程式は $\lambda^2 + 2\mu\lambda + \omega_0^2 = 0$ で，その解は $\lambda = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2}$ です。

ここで，$\mu^2 < \omega_0^2$ の場合を考えます。これは，抵抗係数が小さく，抵抗力が比較的小さい場合にあたります。この場合，特性方程式は虚数解をもつことになるので，微分方程式の一般解は C_1, C_2 を定数として

$$x = e^{-\mu t}(C_1 \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}\ t) + C_2 \sin(\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}\ t)) \tag{10}$$

となり，前節と同様に三角関数を合成して定数をおきかえると，A を定数として

$$x = Ae^{-\mu t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}\ t + \phi) \tag{11}$$

となります。

この運動は，前節の単振動と比べると，振幅が一定値 A ではなく $Ae^{-\lambda t}$ となっており，時間が進むにつれて小さくなっていきます。この運動を**減衰振動**といいます。

強制振動と共鳴

振動する質点に，さらに外部から力が働いておきる振動を**強制振動**といい，外部からの力を**強制力**といいます。

ここでは，強制力が $F\cos\omega t$ である場合を考えます。これは，質点を強制的に角振動数 ω で振動させることに相当します。復元力と強制力を合わせると $-kx+F\cos\omega t$ なので，運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx+F\cos\omega t \tag{12}$$

となります。$f=\dfrac{F}{m}$ とおき，さらに前々節の ω_0 を用いると，この方程式は

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2x=f\cos\omega t \tag{13}$$

と表されます。この方程式は非斉次形２階線形微分方程式です。対応する斉次形の方程式は前々節の (3) 式と同じで，その一般解は $x=A\cos(\omega_0t+\phi)$ です。

一方，非斉次形の方程式の特殊解を求めるため，$x=C\cos\omega t$ とおいて (13) 式に代入すると

$$\begin{gathered}-C\omega^2\cos\omega t+\omega_0^2C\cos\omega t=f\cos\omega t\\ C(\omega_0^2-\omega^2)\cos\omega t=f\cos\omega t\end{gathered} \tag{14}$$

となります。

$\omega\neq\omega_0$ のとき，$C=\dfrac{f}{\omega_0^2-\omega^2}$ です。よって，(13) 式の非斉次形方程式の一般解は

$$x=A\cos(\omega_0t+\phi)+\frac{f}{\omega_0^2-\omega^2}\cos\omega t \tag{15}$$

となります。

この解の第１項は，強制力がない時の振動で**固有振動**といい，$\dfrac{\omega_0}{2\pi}$ を**固有振動数**といいます。一方，第２項は強制振動を表す項です。この項は，強制振動の角振動数 ω が ω_0 に近づくと，どんどん大きくなります。$\omega=\omega_0$ のときは，第２項の分母が 0 になるので，この形では解くことができません。この場合は，特殊解を $x=t(C_1\cos\omega_0t+C_2\sin\omega_0t)$ とおいて (13) 式に代入すると，

$$\begin{aligned}\left(-2C_1\omega_0-tC_2\omega_0^2\right)\sin\omega_0t+\left(2C_2\omega_0-tC_1\omega_0^2\right)\cos\omega_0t+t\omega_0^2\left(C_1\cos\omega_0t+C_2\sin\omega_0t\right)&=f\cos\omega_0t\\ -2C_1\omega_0\sin\omega_0t+2C_2\omega_0\cos\omega_0t&=f\cos\omega_0t\end{aligned} \tag{16}$$

となりますから，$C_1=0, C_2=\dfrac{f}{2\omega_0}$ となります。すなわち，(13) 式の一般解は

$$x=A\cos(\omega_0t+\phi)+\frac{ft}{2\omega_0}\sin\omega_0t \tag{17}$$

となります。この解は，t が大きくなる，すなわち時間がたつにつれ，第２項が振動しながら発散します。この現象を**共鳴**といい，ときには建造物を破壊するほどの事態をひきおこすことがあります。

問題

単振動において，$t=0$ のとき $x=0, \dfrac{dx}{dt}=v$ のとき，運動方程式の特殊解を求めてください。

参考文献

後藤憲一，力学，学術図書，1999. ISBN978-4873-61040-5