

1. $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ より,

$$\begin{aligned} e^{-i\theta} &= \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) \\ &= \cos \theta - i \sin \theta \end{aligned} \quad (\text{A1})$$

なので,

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 \cos \theta \quad (\text{A2})$$

より

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad (\text{A3})$$

が得られ, また

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i \sin \theta \quad (\text{A4})$$

より

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \quad (\text{A5})$$

が得られます。

2. 前問より, $\sin x \cos y + \cos x \sin y$ を指数関数で表すと

$$\begin{aligned} \sin x \cos y + \cos x \sin y &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \cdot \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} + \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \cdot \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \\ &= \frac{1}{4i} [(e^{ix} - e^{-ix})(e^{iy} + e^{-iy}) + (e^{ix} + e^{-ix})(e^{iy} - e^{-iy})] \end{aligned} \quad (\text{A6})$$

です。この右辺を展開して, 指数法則を適用して整理すると

$$\begin{aligned} \sin x \cos y + \cos x \sin y &= \frac{1}{4i} \left[\left\{ (e^{i(x+y)} - e^{-i(x+y)}) + (e^{i(x-y)} - e^{-i(x-y)}) \right\} + \right. \\ &\quad \left. \left\{ (e^{i(x+y)} - e^{-i(x+y)}) - (e^{i(x-y)} - e^{-i(x-y)}) \right\} \right] \\ &= \frac{1}{4i} [2(e^{i(x+y)} - e^{-i(x+y)})] \\ &= \frac{e^{i(x+y)} - e^{-i(x+y)}}{2i} \\ &= \sin(x+y) \end{aligned} \quad (\text{A7})$$

となります。